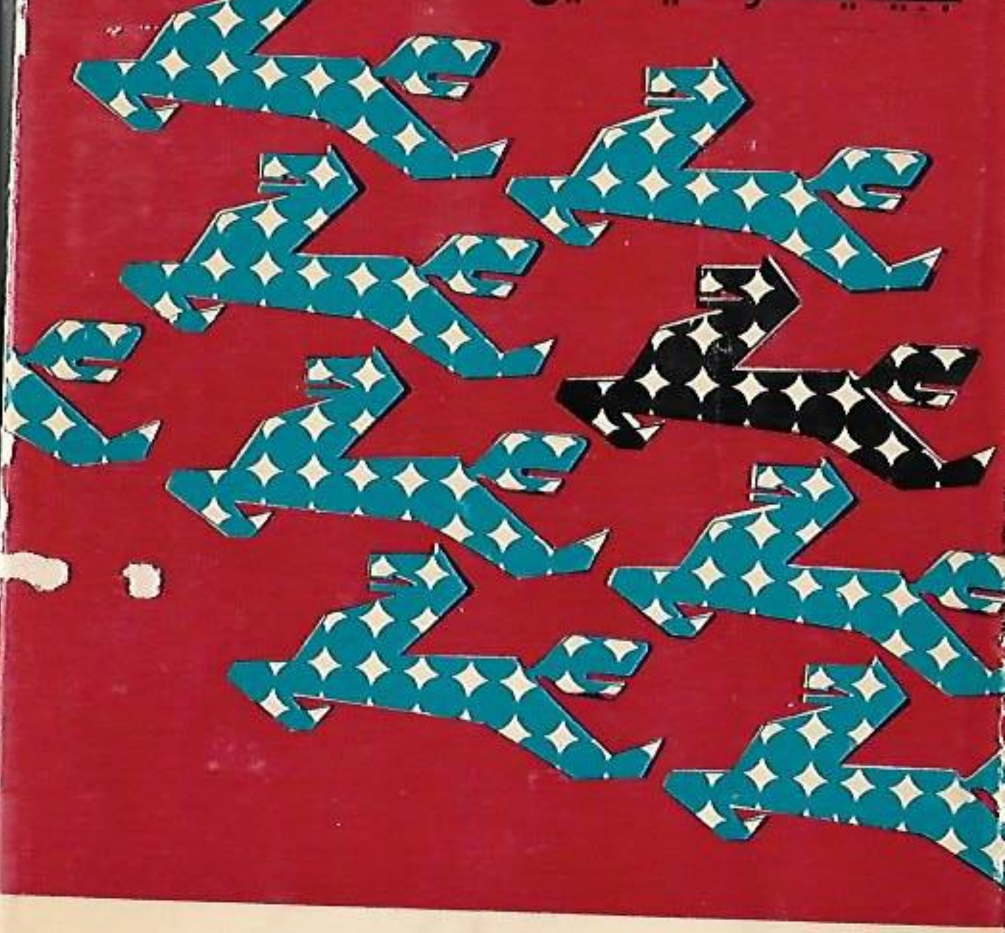
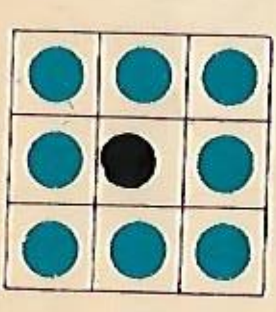
جنيدينكو . خينتشين





# المبادئ الأولية لنظرية الاحتمالات

دار «مير» للطباعة والنشر

١٤٠١ ع
٥١٠ ٢

## أيها القارئ العزيز

تصدر دار «مير» للطباعة والنشر مجموعة من الكتب العلمية والتكنيكية مختارة من افضل المراجع الجامعية ذات المضمون العلمي الواضح والمبسط .

وتصدر هذه المجموعة باللغات العربية والانجليزية والفرنسية والأسبانية .

ويسر دار «مير» ان تكتبوا اليها عن رأيكم في هذه الكتب ، حول مضمونها وترجمتها واسلوبها ، وتكون شاكرة لكم لو ابديتم لها ملاحظاتكم واقتراحاتكم .

عنواننا :
الاتحاد السوفييتي – موسكو
بيرفي ريجسكي بيريولوك ٢

دار « مير »
للطباعة والنشر

Б. В. ГНЕДЕНКО, А. Я. ХИНЧИН

# ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

*На арабском языке*

جنيدينكو ، خينتشين

# المبادئ الاولية لنظرية الاحتمالات

طبعة ثانية

دار «مير» للطباعة والنشر
الاتحاد السوفييتي موسكو
١٩٧٤

## المقدمة

يتيح لنا التعرف على الاسس النظرية لهذا الفرع او ذاك من علم الرياضيات ، استخدام نتائج هذا العلم فى التطبيق العملى ، بشكل واع وفعال . وفى الوقت نفسه فان الامر بالنسبة لنظرية الاحتمالات يتلخص فى ان التطبيقات العملية لهذا الفرع تصادف عددا كبيرا من العاملين فى مختلف الميادين كقادة الجيش (وفى بعض الاحيان الجنود العاديين ) والعاملين فى ميادين الصناعة والاقتصاد الزراعى والاقتصاد بوجه عام وغيرهم ، ممن لم يختصوا بالرياضيات .

ويهدف كتابنا هذا الى اطّلاع العاملين فى هذه الميادين على المفاهيم الاساسية لنظرية الاحتمالات وطرق الحسابات الاحتمالية مستخدمين من اجل ذلك ابسط الصور الرياضية . ويستطيع كل من انهى الدراسة الثانوية استيعاب مواد هذا الكتاب باكملها . ويعتمد الكتاب فى كل ابوابه ، على دراسة امثلة تطبيقية محددة ، غير اننا عند اختيار هذه الامثلة لم نأخذ فى الاعتبار الاهمية التطبيقية والفعلية لهذه الامثلة فقط ، بل وفائدتها فى تقديم صورة واضحة تساعد على استيعاب الاسس النظرية لهذه المسألة او تلك .

## من المؤلف الى القارئ العربى

مر اكثر من عشرين عاما منذ ان كتبت مع استاذى خينتشين هذا الكتاب . ومنذ ذلك الوقت اعيدت طباعة الكتاب عدة مرات ، وتغيرت محتوياته نوعا ما ، فقد تغيرت طبيعة الامثلة ، واضيفت بعض المواد وادخلت فى بعض الاماكن تغيرات فى الشرح . اما بالنسبة لهذه الطبعة فقد اضيف الباب الاخير ، حيث قدمنا شرحا مقتضبا لاحد الفروع الحديثة لنظرية الاحتمالات وهو نظرية الخدمة وكما تسمى كذلك نظرية الطوابير . ومن الواضح اننا نستطيع فى هذا الكتاب فقط وصف المسائل التى تدرسها الفروع العلمية الجديدة المذكورة ، ولكننا لا نستطيع حتى ولو بصورة بسيطة عرض الطرق التحليلية التى تمت دراستها والصعوبة الفعلية التى تواجهنا فى المسائل التى برزت حديثا .

لقد حالف الحظ كتابنا هذا فقد اعيدت طباعته فى الاتحاد السوفييتى عدة مرات ، وترجم الى عدة لغات اوروبية واسيوية وطبع فى عدد من البلدان الاوروبية والاسيوية وفى امريكا والارجنتين وتنوى ترجمته وطباعته فى يوجوسلافيا واسبانيا والمكسيك . غير ان طباعة الكتاب باللغة العربية ، تجلب لى رضى شخصيا كبيرا لاننى اشرفت فى السنوات الاخيرة على تدريس عدد من الاخصائيين

من الجمهورية العربية المتحدة ، وآمل الا تكون العلاقات التى توطدت بيننا علاقات مدرس بتلميذه فقط بل علاقات صداقة كذلك .

وبفضل كتابنا هذا استطاعت الاف كثيرة من الناس التعرف على نظرية الاحتمالات ، واصبحت لديهم صورة عن اهمية تلك النظرية التى تعتبر نظرية عابرة بالنسبة لمعظم فروع العلم والحياة العملية . ولم يقرأ هذا الكتاب الطلبة فقط بل قرأه المهندسون والاطباء والعاملون فى فرع الاداب واللغة والاقتصاديون . واتضح عندئذ ان هذا الكتاب قد ساعد عدة مرات على التطور العلمى والتكنيكى ، اذ انه كان يقود القارئ دائما للاقتناع بالفكرة القائلة بضرورة استخدام المعنى العام لنظرية الاحتمالات من اجل حل عدد من المسائل العملية . وكمثال على ذلك فقد برزت اعمال عديدة حول الطرق الاحصائية لحساب الشبكات الكهربائية فى المؤسسات الصناعية .

سأكون سعيدا اذا ما ساعدت الطبعة العربية للكتاب على تطوير وزيادة الاهتمام بنظرية الاحتمالات فى البلدان العربية وعلى جذب الانتباه الى امكانية هذا العلم الواسعة فى حل المسائل التطبيقية .

ب . جنيدينكو

موسكو ، ٩ ابريل ١٩٦٧

القسم الاول

# الاحتمالات

---

الباب الاول

## احتمالات الحوادث

### ١ ــ مفهوم الاحتمال

عندما يقال ان شخصا يصيب الهدف بنسبة ٩٢ ٪ ، فهذا يعنى انه اذا اطلق مئة طلقة فى ظروف معينة ( من نفس البندقية وعلى نفس الهدف الموجود على نفس البعد من مكان اطلاق النار ... الخ ) فانه يصيب الهدف فى المتوسط ٩٢ مرة . ( اى ان ٨ طلقات تقريبا لا تصيب الهدف ) . وهذا لا يعنى بالطبع انه من كل مئة طلقة يصيب الهدف ٩٢ مرة بالضبط ، فاحيانا يصيبه ٩١ مرة او ٩٠ مرة ، واحيانا ٩٣ مرة او ٩٤ . وقد يتمكن فى بعض الاحيان من ان يصيب الهدف بعدد اكبر بكثير من ٩٢ مرة ، او اقل بكثير منه . ولكن عندما يكون عدد المحاولات كبيرا والظروف واحدة لا تتغير ، فان هذه النسبة تبقى ثابتة فى المتوسط ، ما دام ان فى طوال فترة اطلاق النار لا يحدث اى تغير جوهرى ( تحسن فى مستوى الرامى الذى يطلق النار بان يرفع متوسط الاصابة من ٩٢ الى ٩٥ مثلا ) . وتدل التجربة على ان عدد الطلقات الصائبة التى يطلقها هذا الرامى تقارب فى اغلب الاحوال نسبة ٩٢ طلقة من مئة ولكنه قد يصيب الهدف بنسبة اقل ، لنفرض ٨٨ مرة ، او اكثر من ذلك ولنفرض ٩٦ مرة ، الا ان هذه الاحوال نادرة

رغم حدوثها . والنسبة ٩٢٪، التى توضح مستوى الرامى ، غالبا ما تكون ثابتة ، اى ان معدل اصابة نفس هذا الشخص الهدف (تحت ظروف ثابتة ) غالبا ما يكون هو نفسه ، الا فى بعض الحالات النادرة التى قد ينحرف فيها المعدل عن قيمته المتوسطة بمقدار محسوس .

ولنستعرض الآن مثالا آخر :

لوحظ فى احد المصانع ان ١,٦ ٪ من السلعة المنتجة لا ينطبق مع المواصفات القياسية المطلوبة ، وعلى هذا الاساس اعتبرت هذه الكمية غير صالحة . وهذا يعنى ان من بين كل ١٠٠٠ قطعة قيد الفحص توجد ١٦ قطعة غير صالحة . ومن الطبيعى ان يكون عدد السلع التالفة احيانا اكبر من هذا الرقم ، وفى بعض الاحيان اقل ، ولكن ، يكون عدد القطع غير الصالحة فى المتوسط قريبا من ١٦ ، وفى اغلب المجموعات المكونة من ١٠٠٠ قطعة يكون عدد السلع التالفة قريبا من ١٦، مع العلم باننا فرضنا ان ظروف الانتاج ثابتة (طريقة تنظيم العملية التكنولوجية للانتاج ، ادوات الانتاج ، المواد الخام ، كفاءة العمال . . . . . وهكذا ) .

وبامكاننا ايراد عدد كبير من هذه الامثلة . ونلاحظ فى جميع هذه الامثلة خلال العمليات المتكررة المتجانسة (تكرار اطلاق النار على هدف ما ، انتاج احدى السلع بالجملة ... وهكذا ) ان نسبة وقوع هذه الحادثة او تلك من الحوادث التى تهمنا (اصابة الهدف ، عدم مطابقة السلعة للمواصفات القياسية وغيرها ) تكون ثابتة تقريبا تحت الظروف المعطاة ، الا فى الحالات النادرة التى يحدث فيها انحراف ملحوظ عن متوسط عددى معين .





ولذا ، فاننا نستطيع ان نقرر ان هذا المتوسط يعتبر خاصية مميزة للعمليات المتكررة هذه (تحت شروط محددة تحديدا دقيقا ) . وتوضح نسبة اصابة الهدف كفاءة الرامى ، كما ان نسبة السلع الرديئة فى انتاج ما ، تدل على مستوى جودة الانتاج . ولذا ، فمما لا شك فيه ان معرفة هذه الخاصية لها اهمية كبيرة فى جميع المجالات (العسكرية ، التكنيكية ، الاقتصادية ، الطبيعية ، الكيميائية. . . وما اليها )اذ انها لا تسمح فقط بالتعرف الى ظواهر حدثت فعلا او تقديرها ، بل وبالتنبؤ بنتيجة تلك العمليات التى سنجريها فى المستقبل .

اذا اصاب الرامى الهدف فى المتوسط «وتحت شروط معينة» ٩٢ مرة من ١٠٠ طلقة فاننا نقول بان احتمال اصابة هذا الرامى هدفه تحت هذه الشروط يساوى ٩٢ ٪ (او $\frac{٩٢}{١٠٠}$ او ٠,٩٢ ) . واذا وجدت من بين ١٠٠٠ قطعة من انتاج احد المصانع ، تحت شروط معينة ، ١٦ قطعة غير صالحة ، فاننا نقول بان احتمال عدم جودة الانتاج يساوى ٠,٠١٦ او ١,٦ ٪ .

ما الذى نقصده عامة بأحتمال وقوع حادثة معينة اثناء اجراء العمليات التكرارية ؟ اصبح من السهل الآن الاجابة على هذا السؤال . فالعمليات الكثيرة المتشابهة ، ما هى الا تكرار للعملية الواحدة ، عددا كبيرا من المرات (العمليات التكرارية فى الرماية هى مجموعة من الطلقات المنفردة ، اما فى الانتاج بالجملة — فهى تصنيع فردى لكل قطعة على حدة وهكذا ) . وهنا تهمنا نتيجة معينة فى كل عملية منفردة من هذه العمليات (اصابة كل طلقة الهدف ، عدم جودة كل قطعة على حدة وغير ذلك ) وكذلك عدد

مرات تكرار هذه النتيجة فى العمليات التكرارية التى نجريها ( عدد مرات اصابة الهدف ، عدد قطع الانتاج الرديئة . . . . وهكذا ) . تسمى النسبة المئوية ( او النسبة عامة ) لعدد هذه النتائج «الناجحة»* فى هذه العمليات التكرارية باحتمال الحصول على النتيجة التى تهمنا . وهنا يجب الاخذ بالاعتبار دائما ، ان الحديث عن احتمال وقوع حادثة معينة ( الحصول على النتيجة المطلوبة ) لا يكون ذا معنى ، الا اذا ثبتّنا الشروط التى نجرى كافة العمليات تحتها . واى تغيير فى هذه الشروط ، يعنى بدوره تغييرا فى الاحتمال المطلوب الحصول عليه .

واذا فرضنا انه فى احدى العمليات التكرارية وقعت الحادثة $A$ ( اصابة الهدف مثلا ) فى المتوسط $a$ مرة وذلك كلما اجرينا $b$ عملية منفردة ( اطلاقات مثلا ) ، فان احتمال وقوع الحادثة $A$ تحت شروط معينة يساوى $\frac{a}{b}$ ( أو ٪ $\frac{100a}{b}$ ) . ولذا ، فانه يمكن القول بان احتمال الحصول على نتيجة « ناجحة » فى كل عملية منفردة ، ما هو الا نسبة العدد المتوسط لمشاهدات النتيجة « الناجحة » الى العدد الكلى للعمليات المنفردة .

ومما لا شك فيه ، انه اذا كان احتمال وقوع حادثة ما يساوى $\frac{a}{b}$ ، ففى كل مجموعة مكونة من $b$ عملية منفردة ، يمكن ان تقع هذه الحادثة اكثر او اقل من $a$ مرة ولكنها فى المتوسط تقع $a$ مرة تقريبا . وفى الغالبية العظمى من هذه المجموعات المتكونة من $b$

---

* كان يجب القول فى المثال الثانى « غير الناجحة » ولكن اصطلح فى نظرية الاحتمالات على تسمية النتيجة التى تؤدى الى وقوع الحادثة فى المسألة التى ندرسها « بالنتيجة الناجحة » .



عملية منفردة يكون عدد مرات وقوع الحادثة $A$ قريبا من $a$ وخاصة اذا كانت $b$ عددا كبيرا .

مثال ١ : فى احدى المدن كان عدد المواليد فى الربع الاول من السنة كالتالى :

فى يناير — ١٤٥ ذكرا و ١٣٥ انثى

فى فبراير — ١٤٢ ذكرا و ١٣٦ انثى

فى مارس — ١٥٢ ذكرا و ١٤٠ انثى

ما هو احتمال ان يكون المولود ذكرا ؟ ان نسبة الذكور بين المواليد تساوى :

فى يناير — $\frac{١٤٥}{٢٨٠}$ ≈ ٠,٥١٨ = ٥١,٨ ٪

فى فبراير — $\frac{١٤٢}{٢٧٨}$ ≈ ٠,٥١١ = ٥١,١ ٪

فى مارس — $\frac{١٥٢}{٢٩٢}$ ≈ ٠,٥٢٠ = ٥٢,٠ ٪

من هنا نرى ، ان المتوسط الحسابى لنسبة المواليد الذكور فى كل شهر ، يساوى تقريبا ٠,٥١٦ = ٥١,٦ ٪ .

ففي هذه الحالة ، يكون الاحتمال المطلوب مساويا ٠,٥١٦ او ٥١,٦ ٪ تقريبا ، وهذا الاحتمال معروف جيدا فى علم الديموغرافيا ، وهو العلم الذى يبحث ديناميكا السكان . وقد اتضح ان نسبة الذكور بين المواليد فى الظروف العادية لازمنة مختلفة ، لا تختلف كثيرا عن هذا الرقم .

مثال ٢ : فى بداية القرن الماضى اكتشفت احدى الظواهر الهامة التى سميت بالحركة البراونية ( نسبة لمكتشفها عالم النبات

الانجليزى براون ) . وهذه الظاهرة عبارة عن ان الجسيمات الدقيقة للمادة ، العالقة * فى السائل ، تتحرك فيه حركة عشواء دون اى سبب ظاهر .

وقد ظل العلماء مدة طويلة لا يستطيعون تحليل او تعليل هذه الحركة التى خيل اليهم ، انها حركة ذاتية الى ان اعطتنا نظرية كينيتيكا الغازات توضيحا بسيطا وقاطعا لها . ان حركة الجسيمات العالقة فى السائل ، هى نتيجة تصادم جزيئات السائل بهذه الجسيمات . ولقد اعطتنا النظرية الكينيتيكية للغازات امكانية حساب احتمال عدم وجود اى جسيم عالق من هذه الجسيمات فى حجم معين من السائل ، او احتمال وجود جسيم واحد ، او اثنين او ثلاثة . . . وهكذا . وقد اجريت بعض التجارب لاختيار صحة الفروض النظرية .

وسنورد هنا نتائج ٥١٨ مراقبة للعالم السويدى سفيدبرج لجسيمات الذهب الدقيقة العالقة فى الماء . فقد لاحظ فى المجال المائى الذى اجرى الدراسات عليه انه لم يشاهد ١١٢ مرة ، اى جسيم . وشوهد جسيم واحد ١٦٨ مرة ، وجسيمان ١٣٠ مرة ، وثلاثة جسيمات ٦٩ مرة ، واربعة جسيمات ٣٢ مرة ، وخمسة جسيمات ٥ مرات ، وستة جسيمات مرة واحدة ، وسبعة جسيمات مرة واحدة كذلك

وعلى ذلك ، فان نسبة اختفاء الجسيمات تساوى $\frac{١١٢}{٥١٨}$ = ٠,٢١٦

نسبة مشاهدة جسيم واحد تساوى $\frac{١٦٨}{٥١٨}$ = ٠,٣٢٥

نسبة مشاهدة جسيمين تساوى $\frac{١٣٠}{٥١٨}$ = ٠,٢٥١

* اى توجد فى حالة توازن متعادل ( محايد ) .



نسبة مشاهدة ثلاثة جسيمات تساوى $\frac{٦٩}{٥١٨}$ = ٠,١٣٣

نسبة مشاهدة اربعة جسيمات تساى $\frac{٣٢}{٥١٨}$ = ٠,٠٦٢

نسبة مشاهدة خمسة جسيمات تساوى $\frac{٥}{٥١٨}$ = ٠,٠١٠

نسبة مشاهدة ستة جسيمات تساوى $\frac{١}{٥١٨}$ = ٠,٠٠٢

نسبة مشاهدة سبعة جسيمات تساوى $\frac{١}{٥١٨}$ = ٠,٠٠٢

وقد اتضح ان نتائج المشاهدات تتفق وفروض الاحتمالات النظرية الى حد كبير .

مثال ٣ . فى بعض المسائل العملية الهامة ، كثيرا ما تتطلب معرفة مدى تكرار حرف ما من حروف الابجدية الروسية فى مقالة من المقالات . فالمفروض مثلا الاّ تكون كمية كل حرف فى صندوق الحروف بمطبعة من المطابع مساوية لكمية الحروف الاخرى . لان حرفا من هذه الحروف قد يرد فى نص مطبوع اكثر من الحروف الاخرى مرات عديدة . ولذا ، فانه يتوجب ان تكون كمية الحروف الاكثر استعمالاً اكبر من كمية الحروف الاخرى . وقد ادت الابحاث التى اجريت على النصوص الادبية الى تقدير تكرار حروف الابجدية الروسية وكذلك المسافة بين الكلمات . وقد اوردنا هذا التكرار فى الجدول الآتى * . وهو مرتب حسب تناقص التكرار النسبى لظهور الحرف .

وعلى ذلك ، فان هذه الابحاث اظهرت ان من بين ١٠٠٠ حرف ومسافة اختيرت عفويا فى مقال ما ، يقابلنا الحرف « Ф »

* هذا الجدول مأخوذ من كتاب «الاحتمال والاعلام» للمؤلفين أ . وى . ياجلوم .

فى المتوسط مرتين ، الحرف « к » ٢٨ مرة والحرف « о » ٩٠ ، مرة ، وتقابلنا المسافة بين كلمتين ١٧٥ مرة .

وتعتبر هذه المعطيات مرشدا ودليلا هامين عند تجهيز صندوق الحروف فى المطبعة .

ولقد اجريت فى السنوات الاخيرة ابحاث مماثلة ، ليس فقط فى مجال احصاء الحروف فى النصوص الروسية ، بل اتسعت وشملت ابحاثا لتوضيح خواص اللغة الروسية وخواص الاسلوب الادبى لكل مؤلف .

وقد تستعمل مثل هذه الاحصائيات فى المواصلات اللاسلكية ، لاتباع طريقة اقتصادية تسمح بارسال الانباء باستعمال رموز وشيفرات

| الحرف | المسافة بين الكلمات | о | е, ё | а | и | т | н |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار النسبى | ٠,١٧٥ | ٠,٠٩٠ | ٠,٠٧٢ | ٠,٠٦٢ | ٠,٠٦٢ | ٠,٠٥٣ | ٠,٠٥٣ |
| الحرف | с | р | в | л | к | м | д |
| التكرار النسبى | ٠,٠٤٥ | ٠,٠٤٠ | ٠,٠٣٨ | ٠,٠٣٥ | ٠,٠٢٨ | ٠,٠٢٦ | ٠,٠٢٥ |
| الحرف | п | у | я | ы | з | ь, ъ | б |
| التكرار النسبى | ٠,٠٢٣ | ٠,٠٢١ | ٠,٠١٨ | ٠,٠١٦ | ٠,٠١٦ | ٠,٠١٤ | ٠,٠١٤ |
| الحرف | г | ч | й | х | ж | ю | ш |
| التكرار النسبى | ٠,٠١٣ | ٠,٠١٢ | ٠,٠١٠ | ٠,٠٠٩ | ٠,٠٠٧ | ٠,٠٠٦ | ٠,٠٠٦ |
| الحرف | ц | щ | э | ф | | | |
| التكرار النسبى | ٠,٠٠٤ | ٠,٠٠٣ | ٠,٠٠٢ | ٠,٠٠٢ | | | |



اقل ، مما يعمل على سرعة الارسال ، خاصة وقد اتضح ان شيفرات اجهزة التلغراف الحالية ليست اقتصادية بشكل كاف .

## ٢ ـ الحوادث المستحيلة والحوادث المؤكدة

من الواضح ان احتمال وقوع حادثة ، يكون دائما اما مقدارا موجبا او صفرا . وهو لا يمكن ان يزيد عن الواحد الصحيح ؟ ذلك لانه لا يمكن ان يزيد البسط عن المقام فى الكسر الذى يعين الاحتمال ( عدد العمليات « الناجحة » لا يمكن ان يزيد عن العدد الكلى للعمليات التى نجريها ) .

واذا عبرنا عن احتمال وقوع الحادثة $A$ بالرمز $P(A)$ فانه مهما كانت هذه الحادثة ، فان :

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

وكلما كانت $P(A)$ اكبر ، كلما زاد عدد مرات وقوع الحادثة $A$ . فمثلا ، كلما زاد احتمال اصابة الرامى الهدف ، كلما زاد عدد الاصابات الناجحة ، وكذلك كانت كفاءة الرامى اعلى . واذا كان احتمال وقوع الحادثة قليلا ، فان الحادثة تقع نادرا . واذا كانت $P(A)=0$ فان الحادثة $A$ إما انها لا تقع نهائيا ، او يكون وقوعها نادرا جدا ، بحيث اننا نعتبرها مستحيلة الوقوع عمليا . وبالعكس ، اذا كانت $P(A)$ قريبة من الواحد الصحيح ، فان قيمة البسط فى الكسر الذى يعطينا هذا الاحتمال تكون قريبة من قيمة المقام ، اى ان الغالبية العظمى من العمليات ، هى عمليات « ناجحة » ، وتقع هذه الحادثة فى اغلب الاحوال .

واذا كانت $P(A) = 1$ فان الحادثة تقع دائما او غالبا ما تقع . وعلى ذلك ، فاننا نعتبرها ممكنة الوقوع عمليا او كما يقال « مؤكدة » اى اننا نستطيع ان نعتبر وقوعها اكيدا .

اما اذا كانت $P(A) = \frac{1}{2}$ فان الحادثة $A$ تقع تقريبا ، عددا من المرات يساوى نصف العدد الكلى للعمليات التى نجريها . اى اننا نشاهد العمليات « الناجحة » بنفس قدر العمليات « غير الناجحة » . واذا كانت $P(A) > \frac{1}{2}$ فان عدد مرات وقوع الحادثة $A$ يكون اكبر من عدد مرات عدم وقوعها، واذا كانت $P(A) < \frac{1}{2}$ ، فسيحدث العكس .

الى اى حد يجب ان يكون احتمال وقوع الحادثة قليلا بحيث يمكن ان نعتبرها حادثة مستحيلة عمليا ؟ لا يمكن اعطاء جواب عام على هذا السؤال ، وذلك لانه يعتمد على مدى اهمية الحادثة التى يدور الحديث حولها .

ان ٠,٠١ مثلا يعتبر عددا صغيرا . فاذا كانت هناك مجموعة من القذائف وكان احتمال عدم انفجار القذيفة عند سقوطها يساوى ٠,٠١ ، فهذا يعنى ان ١ ٪ تقريبا من القذائف يكون بدون فعالية . وهذا يمكن تقبله . اما اذا كانت هناك مجموعة من المظلات ، وكان احتمال عدم انفتاح المظلة اثناء الهبوط ٠,٠١ ، فمن المستحيل بالطبع تقبل هذا الامر ، وذلك لانه اذا قفز ١٠٠ مظلى ، فان احدهم سيفقد حياته عبثا . ويوضح هذان المثالان انه يجب ان نحدد فى كل مسألة على حدة ، وعلى اساس الاختبار العملى ، الى اى مدى يجب ان يكون احتمال وقوع الحادثة قليلا لكى نعتبرها مستحيلة الوقوع بدون اى تأثير على الفائدة من النتيجة التى نحصل عليها .



### ٣ ـ مسألة

يصيب احد الراميين الهدف بنسبة ٨٠ ٪ ، وآخر (تحت نفس شروط الاطلاق) بنسبة ٧٠ ٪ . اوجد احتمال اصابة الهدف اذا اطلق الراميان النار فى نفس الوقت ، مع العلم بان الهدف يعتبر مصابا اذا اصابته احدى الرصاصتين .

الطريقة الاولى للحل . نفرض ان كلا منهما اطلق مئة طلقة فى آن واحد . فبالتقريب ، يصيب الرامى الاول الهدف ٨٠ مرة ويخطئه فى العشرين طلقة الباقية . وحيث ان الرامى الثانى يصيب الهدف فى المتوسط ٧٠ مرة من مئة طلقة ، اى ان سبع طلقات من عشر طلقات تصيب الهدف ، لهذا ينتظر ان تكون من بين العشرين طلقة التى يخطئ الرامى الاول فيها الهدف ، ١٤ طلقة يستطيع الثانى فيها اصابته . وعلى ذلك ، فان من بين كل الطلقات المئة التى اطلقت ، يمكن ان تصيب الهدف ٨٠ + ١٤ = ٩٤ رصاصة تقريبا . ولذا ، فان احتمال اصابة الهدف اذا ما اطلق الراميان عليه النار فى نفس الوقت يساوى ٩٤ ٪ او ٠,٩٤ .

الطريقة الثانية للحل . نفرض مرة اخرى ان كلا من الراميين اطلق مئة طلقة . وقد رأينا ان الرامى الاول يخطئ الهدف ٢٠ مرة تقريبا . وبما ان الثانى يخطئ الهدف ٣٠ مرة ، اى ان هناك تقريبا ٣ طلقات طائشة من بين كل عشر طلقات ، لذا فانه ينتظر ان تصاحب العشرين طلقة الطائشة للرامى الاول ٦ طلقات طائشة للرامى الثانى تقريبا . اى انه عند كل طلقة من هذه الطلقات الست ، لا يصاب الهدف باية رصاصة . اما فى الـ ٩٤ طلقة الاخرى ، فيصيب الهدف احد الراميين على الاقل . وبذلك نصل الى نفس

النتيجة ، وهى انه عندما يطلق الراميان النار معا ، فان الهدف يصاب ٩٤ مرة اى ان احتمال الاصابة يساوى ٩٤ ٪ او ٠,٩٤ .

وتعتبر المسألة التى درسناها سابقا بسيطة جدا . الا انها تقودنا الى نتيجة هامة للغاية ، وهى انه يحدث فى بعض الحالات ان يكون من المفيد ايجاد احتمال وقوع حوادث معينة اكثر تعقيدا بمعرفة احتمال وقوع حوادث اخرى بسيطة .

ففى الواقع ، تقابلنا هذه الحالات كثيرا جدا ، ليس فقط فى مسائل العلوم العسكرية ، بل وفى جميع فروع العلم ، وفى جميع اوجه الحياة العملية ، حيث تلاقينا ظواهر كثيرة تجب دراستها .

ومن البديهى ان تصبح المسألة معقدة جدا ، اذا ما حاولنا البحث عن حل خاص يناسب كل مسألة جديدة تقابلنا . وان العلم ليحاول دائما ان يجد قاعدة عامة نستطيع بمعرفتها ، حل مسائل متشابهة بصورة اوتوماتيكية .

ففى مجال الظواهر التى تتكرر كثيرا ، يسمى العلم الذى يأخذ على عاتقه صياغة هذه القاعدة العامة بنظرية الاحتمالات . وسنورد فى هذا الكتاب المبادئ الاولية لهذا العلم .

وتعتبر نظرية الاحتمالات فرعا من فروع علم الرياضيات مثل الحساب او الهندسة . ولذا ، فان طريقتها هى طريقة التفكير العقلى الدقيق وادواتها هى المعادلات والجداول والرسوم البيانية وغيرها.

الباب الثانى

# قاعدة جمع الاحتمالات

## ٤ ـ استنتاج قاعدة جمع الاحتمالات

تعتبر قاعدة جمع الاحتمالات التى سندرسها الآن ، ابسط واهم قاعدة غامة تستخدم لحساب الاحتمالات .

فى عملية التصويب على هدف ، كما هى مبينة بالشكل ١ ، ومن على بعد معين معلوم ، فان لكل رام ، احتمال اصابة اى من المناطق ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ .

لنفرض ان احتمال اصابة المنطقة ١ لدى رام ما يساوى ٠,٢٤ ، واحتمال اصابة المنطقة ٢ يساوى ٠,١٧ . وهذا يعنى كما نعلم ، ان من بين مئة رصاصة يطلقها هذا الرامى ، تصيب المنطقة ١ منها فى المتوسط ، ٢٤ رصاصة والمنطقة ٢ ، ١٧ رصاصة .




شكل ١

نفرض انه فى مسابقة ما ، اعتبر التصويب «ممتازا» اذا اصابت الرصاصة المنطقة ١ و «جيدا» اذا اصابت المنطقة ٢ ، فما هو احتمال ان يكون تصويب هذا الرامى جيدا او ممتازا ؟ يمكن الاجابة على هذا السؤال ببساطة .

من بين مئة رصاصة يطلقها هذا الرامى تقع ٢٤ تقريبا فى المنطقة ١ و ١٧ فى المنطقة ٢ ، اى انه من كل مئة رصاصة تقع ٢٤+١٧ = ٤١ رصاصة إما فى المنطقة ١ او فى المنطقة ٢ .

وعلى ذلك، فان الاحتمال المطلوب يساوى ٠,٢٤+٠,١٧=٠,٤١ .

اى ان احتمال كون التصويب ممتازا او جيدا ، يساوى مجموع احتمالات كون التصويب ممتازا ، وكونه جيدا .

مثال آخر : ينتظر راكب ما ، الترام رقم ٢٦ او رقم ١٦ على رصيف تحاذيه اربعة خطوط ترام ، هى : رقم ١٦ ، رقم ٢٢ ، رقم ٢٦ ورقم ٣١ . ولنعتبر ان تتابع وصول تراموايات كل خط ، مساو للآخر . اوجد احتمال ان يكون الترام الاول الذى يصل الى الموقف هو الترام اللازم للراكب .

من الواضح ان احتمال وصول الترام رقم ١٦ الى الموقف اولا يساوى $\frac{١}{٤}$ وهو نفس احتمال وصول الترام رقم ٢٦ اولا . وبهذا فان الاحتمال المطلوب ايجاده يساوى $\frac{١}{٢}$ . ولكن

$$\frac{١}{٤}+\frac{١}{٤}=\frac{١}{٢}$$

ولذا ، فانه يمكن القول بان احتمال وصول الترام رقم ١٦ او رقم ٢٦ اولا ، يساوى مجموع احتمالات وصول الترام رقم ١٦ والترام رقم ٢٦ .



ويمكننا الآن عرض فكرة عامة وهى :

عند اجراء العمليات التكرارية ، اتضح انه فى كل مجموعة مكونة من $b$ عملية منفردة ، تظهر النتائج الآتية :

وقعت الحادثة $A_1$ فى المتوسط $a_1$ مرة ،

وقعت الحادثة $A_2$ فى المتوسط $a_2$ مرة ،

وقعت الحادثة $A_3$ فى المتوسط $a_3$ مرة .

وهكذا . وبكلمة اخرى :

احتمال وقوع الحادثة $A_1$ يساوى $\frac{a_1}{b}$ ،

احتمال وقوع الحادثة $A_2$ يساوى $\frac{a_2}{b}$ ،

احتمال وقوع الحادثة $A_3$ يساوى $\frac{a_3}{b}$ .

وهكذا .

فما هو احتمال الحصول على احدى النتائج ( بصرف النظر عن اية منها تقع ) $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ ، . . . اثناء اجراء عملية واحدة محددة ؟

ويمكن تسمية الحادثة التى تهمنا ( $A_1$ او $A_2$ او $A_3$ او . . . ) * . وتقع هذه الحادثة ( $a_1+a_2+a_3+...$ ) مرة عند اجراء $b$ عملية ، اى ان الاحتمال المطلوب معرفته يساوى

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\dots}{b}=\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\frac{a_3}{b}+\dots$$

ويمكن كتابته بالصيغة التالية

$$P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } A_3 \text{ or}\dots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\dots$$

* الثلاث نقط هنا وفيما بعد تعنى «وهكذا» .

في كل من هذه الامثلة التى شرحناها وكذلك فى تحليلنا العام ، افترضنا دائما ان اية نتيجتين من النتائج التى ندرسها ( مثلا $A_1$ و $A_2$ ) منافيتان لبعضهما البعض اى انه لا يمكن وقوعهما فى عملية واحدة . ففى مثال الترام ، لا يمكن ان يصل الترام المطلوب مع الترام غير المطلوب فى نفس الوقت . اى ان الترام القادم إما ان يكون هو اللازم للراكب او لا يكون .

ومما يجب ملاحظته ، ان الفرض بان بعض النتائج المنفردة التى ندرسها متنافية مع بعضها ، مهم جدا . وبدونه ، تصبح قاعدة الجمع غير صحيحة ، ويؤدى استخدامها الى اخطاء كبيرة .

ففى المثال المحلول فى آخر البند السابق مثلا ، والذى كان المطلوب فيه ايجاد احتمال اصابة الهدف من قبل الرامى الاول او الثانى اذا ما كان التصويب فى نفس الوقت ، مع العلم بان احتمال اصابة الرامى الاول للهدف يساوى ٠,٨ والثانى ٠,٧ . فلو استعملنا لحل هذه المسألة قاعدة الجمع ، ينتج ان الاحتمال المطلوب يساوى ٠,٨ + ٠,٧ = ١,٥ . وهذه نتيجة غير معقولة ، حيث اننا نعلم ان احتمال وقوع اية حادثة لا يمكن ان يزيد عن الواحد الصحيح . وقد وصلنا الى هذه النتيجة الخاطئة ، لاننا استعملنا قاعدة الجمع فى الحالة التى يستحيل فيها استعمالها . فالحادثتان اللتان نتحدث عنهما فى هذا المثال ( اصابة الراميين الاول والثانى للهدف ) متطابقتان ، وذلك لانه من الممكن ان يصيب كلا الراميين الهدف فى نفس المحاولة المزدوجة . فالقسم الاكبر من الاخطاء التى يقع فيها المبتدئون عند حساب الاحتمالات ، سببه الاستعمال غير الصحيح لقاعدة جمع الاحتمالات . ولذا ، فانه لكى نتجنب هذا الخطأ عند استعمال قاعدة الجمع ، يجب



دائما ان نتأكد ، وبكل دقة ، من ان كل حادثتين من الحوادث التى ندرسها متنافيتان مع بعضهما .

والآن ، نستطيع ان نعطى المنطوق العام لقاعدة جمع الاحتمالات .

قاعدة الجمع :

**ان احتمال الحصول على اية نتيجة من النتائج ( $A_1, A_2, ..., A_n$ ) فى احدى العمليات ، يساوى مجموع احتمالات الحصول على كل نتيجة على حدة. وذلك بفرض ان كل نتيجتين من هذه النتائج ، متنافيتان مع بعضهما .**

## ٥ ـ مجموعة الحوادث المتكاملة

فى قرض وطنى باجل ٢٥ عاما ، كان $\frac{1}{3}$ عدد السندات المصروفة رابحا ، والثلثان الباقيان يسددان بنفس قيمتهما عند انتهاء اجل القرض . او بتعبير آخر ، كان احتمال ان يربح سند ما ، يساوى $\frac{1}{3}$ ، واحتمال ان يسدد بنفس قيمته ، يساوى $\frac{2}{3}$ . ان الربح والتسديد بنفس القيمة يعتبران حادثتين متناقضتين ، اى انهما حادثتان من النوع الذى لا بد وان تقع واحدة منهما فقط لكل سند ، ومجموع احتماليهما يساوى :

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

وهذا ليس مجرد صدفة . اذ ان الحادثتين $A_1$ و $A_2$ اذا كانتا متناقضتين بوجه عام واذا كانت الحادثة $\acute{A}_1$ قد وقعت $a_1$ مرة اثناء اجراء $b$

عملية ، والحادثة $A_2$ وقعت $a_2$ مرة فمن الواضح ان $a_1+a_2=b$ وبما ان

$$P(A_1)=\frac{a_1}{b},\ \ P(A_2)=\frac{a_2}{b}$$

فان

$$P(A_1)+P(A_2)=\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}=\frac{a_1+a_2}{b}=1$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة باستعمال قاعدة جمع الاحتمالات . فبما ان الحادثتين المتناقضتين متنافيتان ، فان :

$$P(A_1)+P(A_2)=P(A_1\ or\ A_2)$$

ولكن الحادثة ( $A_1$ او $A_2$ ) هى حادثة مؤكدة الوقوع ، حيث انه ينتج من تعريف الحوادث المتناقضة ، ان احدى هذه الحوادث لا بد وان تقع . لذا ، فان احتمال وقوع الحادثة ( $A_1$ او $A_2$ ) يساوى واحدا صحيحا . وبذلك نحصل من جديد على :

$$P(A_1)+P(A_2)=1$$

**ان مجموع احتمال وقوع حادثتين متناقضتين يساوى واحدا صحيحا .**

وبنفس الطريقة التى اثبتنا بها هذه القاعدة، يمكن اثبات القاعدة العامة الهامة الآتية : لنفرض انه عندنا $n$ ( اى عدد ) من الحوادث $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ ، بحيث انه لا بد وان تقع واحدة فقط من هذه الحوادث فى عملية منفردة . وسنصطلح على تسمية مجموعة الحوادث من هذا النوع « بالمجموعة المتكاملة » . اذ من الواضح ان كل حادثتين متناقضتين تكونان مجموعة متكاملة .

**ان حاصل جمع احتمالات وقوع الحوادث التى تكوّن مجموعة متكاملة يساوى واحدا صحيحا .**



وذلك لان من تعريف المجموعة المتكاملة للحوادث ، يتضح ان اية حادثتين من حوادث هذه المجموعة ، تكونان متنافيتين . وبذلك تعطينا قاعدة الجمع :

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=P(A_1\ or\ A_2\ or\ \ldots,\ or\ A_n)$$

ولكن الطرف الايمن لهذه المعادلة ، ما هو الا احتمال وقوع حادثة مؤكدة ، ولذا فانه يساوى واحدا صحيحا . ولذلك وبالنسبة للمجموعة المتكاملة من الحوادث ، تكون المعادلة الآتية صحيحة :

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

وهذا هو المطلوب اثباته .

مثال ١ : من بين كل مئة طلقة اطلقت على هدف كما هو موضح بالشكل ١ ( صفحة ٢١ ) يصيب الرامى فى المتوسط :

٤٤ مرة المنطقة ١
٣٠ مرة المنطقة ٢
١٥ مرة المنطقة ٣
٦ مرات المنطقة ٤
٤ مرات المنطقة ٥
مرة واحدة المنطقة ٦

( ٤٤ + ٣٠ + ١٥ + ٦ + ٤ + ١ = ١٠٠ ) .

ومن الواضح ان النتائج الست تكون مجموعة متكاملة من الحوادث ، واحتمالات وقوعها تساوى على التوالى

٠,٤٤ ؛ ٠,٣٠ ؛ ٠,١٥ ؛ ٠,٠٦ ؛ ٠,٠٤ ؛ ٠,٠١

وهكذا فان :

٠,٤٤ + ٠,٣٠ + ٠,١٥ + ٠,٠٦ + ٠,٠٤ + ٠,٠١ = ١

ان الرصاصات التى تقع فى المنطقة ٦ لا تصيب الهدف كليا او جزئيا ولذلك لا يمكن حسابها . ولكن هذا لا يمنع من حساب احتمال اصابة هذه المنطقة ، ولذلك يطرح حاصل جمع احتمالات اصابة المناطق الاخرى من الواحد الصحيح .

مثال ٢ : اثبتت الاحصائيات فى مصنع للنسيج ، ان من بين كل مئة مرة توقفت فيها ماكينة النسيج عن العمل وتطلبت مساعدة العامل فى تشغيلها ، كانت فى المتوسط :

٢٢ مرة بسبب قطع فى خيط السداة ،
٣١ مرة بسبب قطع فى خيط اللحمة ،
٢٧ مرة بسبب تغيير المكوك ،
٣ مرات بسبب كسر فى حامل المكوك ،

اما المرات الباقية فكانت لاسباب اخرى مختلفة .

والى جانب بعض الاسباب الاخرى ، توجد اربعة اسباب لتوقف الماكينة ، يساوى احتمال حدوثها على التوالى :

٠,٢٢ ؛ ٠,٣١ ؛ ٠,٢٧ ؛ ٠,٠٣

ان مجموع هذه الاحتمالات يساوى ٠,٨٣ . وهذه الاسباب الاربعة ، تكون مع الاسباب الاخرى ، مجموعة متكاملة من الحوادث . ولذلك فان احتمال توقف الماكينة فى الحالات النادرة الاخرى يساوى : ١ − ٠,٨٣ = ٠,١٧ .

## ٦ ـ امثلة

على اساس مفهوم المجموعة المتكاملة من الحوادث التى درسناها اخيرا ، يوجد ما يسمى بالاحتمال الافتراضى اى الاحتمال الذى يفترض انه قد حسب قبل اجراء التجربة .



لنفرض على سبيل المثال ، انه تجرى دراسة تساقط الجسيمات الكونية على مساحة صغيرة على هيئة مستطيل مقسم الى ستة مربعات متساوية ، ومرقمة كما هو واضح فى الشكل ٢ . وتقع جميع هذه المساحات الست تحت نفس الظروف ، ولذا فانه ليس هناك ما يدعو الى ان نفترض بان عدد الجسيمات التى تسقط على احد المربعات اكبر منه على المربعات الاخرى .

| | | |
|---|---|---|
| ٣ | ٢ | ١ |
| ٦ | ٥ | ٤ |

شكل ٢

وعلى ذلك ، فاننا سنفترض ان الجسيمات فى المتوسط ، تقع على كل مربع من المربعات الستة ، بنفس الكمية . اى ان احتمالات تساقط الجسيمات على المربعات الستة $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ متساوية . واذا ما اقتصرنا فقط ، على دراسة الجسيمات التى تتساقط على هذا المستطيل (حسب النظرية التى اثبتناها بالنسبة للمجموعة المتكاملة للحوادث) ينتج ان كلا من هذه الاحتمالات $p$ يساوى $\frac{1}{6}$ ، وذلك لان جميع هذه الاحتمالات متساوية ومجموعها يساوى واحدا صحيحا . وتعتمد هذه النتيجة بالطبع على بعض الافتراضات . وللتأكد من صحة هذه النتيجة ، يجب اجراء التجربة لاختبارها . ولكننا قد تعودنا فى مثل هذه

الحالات على النتائج الايجابية التى تعطينا اياها التجربة ، بحيث اننا نتمكن بكل اطمئنان من ناحية النتائج العلمية ، الاعتماد على الافتراضات النظرية التى نضعها قبل التجربة . وفى هذه الحالات ، عادة ما يقال بان لهذه العملية توجد $n$ من النتائج المتساوية الاحتمال (فى المثال السابق يكون نتيجة تساقط الجسيم الكونى الواحد على المساحة المبينة فى الشكل ٢ ، هو سقوطها على احد المربعات الستة) .

ان احتمال الحصول على كل نتيجة من هذه الـ $n$ نتيجة فى هذه الحالة ، يساوى $\frac{1}{n}$ . وتتلخص اهمية مثل هذا الحساب الافتراضى فى انه يسمح فى حالات كثيرة بتوقع قيمة احتمال وقوع الحادثة ، عندما يكون اجراء العمليات التكرارية اما مستحيلا ، او صعب التنفيذ .

مثال ١ : يتكون رقم كل سند من سندات القرض الوطنى عادة من خمسة ارقام . لنفرض اننا نريد ايجاد احتمال ان يكون الرقم الاخير لسند ما من السندات الرابحة ٧ (اى على سبيل المثال السند رقم ٥٩٦٠٧) . حسب تعريف مفهوم الاحتمال ، يجب ان نعد جميع السندات الرابحة ، ثم نجد عدد السندات الرابحة التى ينتهى رقمها بالعدد ٧ ، وخارج قسمة هذا العدد على العدد الكلى للسندات الرابحة ، يعطينا الاحتمال المطلوب . ولكننا نستطيع بكل اطمئنان ، ان نعتبر ان ايا من الاعداد العشرة : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ يمكن ان يأتى فى نهاية رقم السند الرابح . ولذلك يمكننا افتراض ان الاحتمال المطلوب يساوى ٠,١ بدون اى تردد . ويمكن للقارئ ان يتأكد من صحة هذا الافتراض النظرى ، بان يأخذ جدول السندات



الرابحة ويجرى الحساب اللازم لايجاد هذا الاحتمال . وسيتأكد من ان كلا من الارقام العشرة ، ابتداء من الصفر الى ٩ ، يأتى فى نهاية رقم كل سند تقريبا بنسبة $\frac{1}{10}$ .

مثال ٢ : انقطع فى مكان غير معلوم ، الخط التليفونى الذى يصل بين مدينتى $A$ و $B$ ، وكان البعد بينهما يساوى ٢ كم . ما هو احتمال ان يكون هذا الخط قد انقطع فى مكان لا يبعد عن المدينة A اكثر من ٤٥٠ مترا ؟

اذا ما تصورنا اننا قسمنا الخط الى اقسام ، طول كل منها متر واحد ، وباعتبار ان جميع هذه الاقسام متجانسة ، فان احتمال ان ينقطع الخط فى اى قسم من هذه الاقسام يساوى احتمال ان ينقطع فى اى قسم آخر . وبذلك فانه كما سبق ، نجد ان الاحتمال المطلوب يساوى

$$\frac{٤٥٠}{٢٠٠٠} = ٠,٢٢٥$$

## الاحتمالات المشروطة وقاعدة ضربها

### ٧ ـ مفهوم الاحتمال المشروط

تصنع المصابيح الكهربائية فى مصنعين ، بحيث يعطينا المصنع الاول ٧٠ ٪ والثانى ٣٠ ٪ من مجموع ما يتطلب من المصابيح لغرض الاستعمال .

ويعطينا المصنع الاول ٨٣ مصباحا قياسيا * من كل ١٠٠ ينتجه . اما الثانى فيعطينا ٦٣ مصباحا قياسيا من كل مئة .

ومن السهل استنتاج ان من بين كل ١٠٠ مصباح يحصل عليها المستهلك ، يوجد فى المتوسط ٧٧ مصباحا قياسيا ** . وعلى ذلك ، فان احتمال شراء المستهلك مصباحا قياسيا هو ٠,٧٧ . ولكن لنفرض الآن اننا علمنا بان المصابيح الموجودة فى المحل ، مصنوعة فى المصنع الاول ، عندئذ يتغير احتمال شراء المستهلك مصباحا قياسيا . فيصبح هذا الاحتمال مساويا : $\frac{٨٣}{١٠٠}$ = ٠,٨٣ .

يوضح المثال السابق انه اذا اضفنا الى الشروط العامة للعملية (العملية فى المثال السابق هى شراء المصباح) شرطا جوهريا

---

* سنعتبر المصباح قياسيا (يحقق المواصفات القياسية) او كما يسمى احيانا نموذجيا اذا اضاء مدة لا تقل عن ١٢٠٠ ساعة . اما اذا اصابه العطب قبل ذلك ، فاننا سنعتبره غير قياسى .

** استنتج العدد ٧٧ من المعادلة التالية : ٠,٧×٨٣+٠,٣×٦٣=٧٧ .



جديدا (الشرط الجديد هنا هو معرفة اى من المصنعين انتج المصباح) فان هذه الاضافة يمكن ان تغير من احتمال الحصول على نتيجة ما للعملية الواحدة . وهذا واضح . اذ ان جوهر مفهوم الاحتمال ، يتطلب ان تكون مجموعة الشروط التى تجرى تحتها العمليات التكرارية محددة تماما . واذا اضيف شرط جديد الى مجموعة هذه الشروط ، سيتحتم ـ بعد هذه الاضافة ـ اجراء تلك العمليات تحت شروط جديدة ، وهذا يعنى اجراء عمليات جديدة تختلف عما سبقتها . ولذلك ، فان احتمال الحصول على هذه النتيجة او تلك يكون غير ذلك الذى نحصل عليه تحت الشروط الاولى .

وعلى ذلك ، فلدينا احتمالان مختلفان لنفس الحادثة (شراء مصباح قياسى) حصلنا عليهما تحت شروط مختلفة : وبما اننا لم نضع شرطا اضافيا (لا نأخذ بعين الاعتبار المصنع الذى انتج المصباح) فان الاحتمال غير المشروط لشراء مصباح قياسى يساوى ٠,٧٧ ، اما اذا وضعنا شرطا اضافيا (صنع المصباح فى المصنع الاول) فاننا نحصل على الاحتمال المشروط ٠,٨٣ وهو يختلف عن الاحتمال السابق .

واذا رمزنا الى الحادثة (شراء مصباح قياسى) بـ $A$ ، وللحادثة (صناعة المصباح فى المصنع الاول) بـ $B$ ، فانه يرمز الى الاحتمال غير المشروط لوقوع الحادثة $A$ عادة بـ $P(A)$ ، وبالرمز $P_B(A)$ الى احتمال وقوع نفس الحادثة بشرط وقوع الحادثة اى ان المصباح صنع فى المصنع الاول : وعلى ذلك ، فان

$$P(A)=0{,}77;\ P_B(A)=0{,}83$$

وبما اننا لا نستطيع ان نتحدث عن احتمال هذه النتيجة او تلك ، لعملية معينة الا تحت شروط معينة تماما ، نؤكد بذلك على

ان اى احتمال ما هو الا احتمال مشروط . ولا يوجد ما يسمى بالاحتمال غير المشروط ( بالمعنى الحرفى لكلمة « مشروط » ) . غير ان الوضع فى اغلب المسائل المحددة يكون كالتالى : تجرى العمليات تحت مجموعة من الشروط المحددة $K$ . ويفترض ان هذه الشروط موجودة فى كافة العمليات . واذا لم نضف اى شرط آخر الى مجموعة الشروط $K$ اثناء حساب الاحتمال ، فان هذا الاحتمال يسمى احتمالا غير مشروط . اما الاحتمال المشروط ، فهو ذلك الذى نجده بفرض تحقق شروط اخرى اضافية معينة بدقة ، تختلف عن مجموعة الشروط العامة المفروضة فى كافة العمليات السابقة .

فى المثال السابق افترضنا بالطبع ، ان صنع المصباح يجري تحت شروط محددة بالنسبة لجميع ما ينتج منها ويباع فى الاسواق . ولقد اهملنا ذكر هذا الفرض فى نفس المسألة حيث انه واضح وطبيعى ، اننا اذا لم نضع شروطا اضافية لمصباح معين ، فان احتمال الحصول على هذه النتيجة او تلك فى تجربة هذا المصباح يسمى احتمالا غير مشروط . اما اذا تطلبنا شرطا آخر علاوة على الشروط العامة ، فان الاحتمال المطلوب ايجاده يصبح احتمالا مشروطا .

مثال ١ : يتضح من المثال الذى درسناه فى اول هذا البند ، ان احتمال كون المصباح مصنوعا فى المصنع الثانى ، يساوى ٠,٣ . فما هو احتمال كون هذا المصباح مصنوعا فى المصنع الثانى اذا كان قياسيا ؟

من كل ١٠٠٠ مصباح معروض للبيع ، يوجد ٧٧٠ مصباحا ذا خواص قياسية ، مع العلم بان من بينها ٥٨١ مصباحا مصنوعا



فى المصنع الاول و١٨٩ فى المصنع الثانى * . وبعد القيام بالمراقبة يكون احتمال كون المصباح من انتاج المصنع الثانى مساويا $\frac{١٨٩}{٧٧٠} \approx ٠,٢٤٥$ . وهذا هو الاحتمال المشروط لكى يكون المصباح من انتاج المصنع الثانى محسوبا بفرض انه قياسى . وباستعمال الرموز التى ذكرناها سابقا يمكن التعبير عن هذا كالآتى :

$$P(\overline{B}) = 0.3;\ P_A(\overline{B}) \approx 0{,}245$$

( الحادثة $\overline{B}$ تعنى عدم وقوع الحادثة $B$ ) .

مثال ٢ : اوضحت الاحصائيات التى اجريت خلال سنوات عديدة فى منطقة ما ان من بين ١٠٠٠٠٠ طفل بلغوا سن العاشرة ، يعيش ٨٢٢٧٧ منهم فى المتوسط ، حتى سن الاربعين ، و٣٧٩٧٧ حتى سن السبعين . اوجد احتمال ان يعيش الشخص البالغ سن الاربعين حتى السبعين .

بما انه من بين الـ ٨٢٢٧٧ شخصا الذين يصل عمرهم الى الاربعين عاما يعيش فى المتوسط ٣٧٩٧٧ حتى سن السبعين ، فان احتمال ان يعيش من وصل عمره الى الاربعين حتى سن السبعين يساوى

$$\frac{٣٧٩٧٧}{٨٢٢٧٧} \approx ٠,٤٦$$

---

* من السهل حساب هذا بالطريقة التالية : من كل ١٠٠٠ مصباح توجد فى المتوسط ٧٠٠ من انتاج المصنع الاول ومن كل ١٠٠ مصباح مصنوع فى المصنع الاول يوجد ٨٣ ذا خواص قياسية معينة ، وعلى ذلك ، فانه من بين ٧٠٠ مصباح مصنوع فى المصنع الاول ، يوجد ٧ × ٨٣ = ٥٨١ ذا خواص قياسية . وتكون المصابيح القياسية الباقية وعددها ١٨٩ من انتاج المصنع الثانى .

واذا عبرنا بالرمزين $A$ ، $B$ عن كلتا الحادثتين وهما على التوالى : الاولى : يعيش الطفل الذى بلغ عمره ١٠ سنوات حتى سن السبعين . الثانية : يعيش الطفل الذى بلغ عمره ١٠ سنوات حتى سن الاربعين ، فبالطبع يكون

$$P(A) = 0{,}37977 \approx 0{,}38;\ P_B(A) \approx 0{,}46$$

## ٨ ـ استنتاج قاعدة ضرب الاحتمالات

لنعد الى المثال الاول فى البند السابق . من كل ١٠٠٠ مصباح معروض للبيع يوجد فى المتوسط ، ٣٠٠ مصباح من انتاج المصنع الثانى . ومن هذه الـ ٣٠٠ الاخيرة ، يوجد ١٨٩ مصباحا قياسيا ، من ذلك نجد ان احتمال كون المصباح من انتاج المصنع الثانى ( الحادثة $\overline{B}$ ) يساوى

$$P(\overline{B}) = \frac{300}{1000} = 0{,}3$$

واحتمال كون المصباح قياسيا تحت شرط ان يكون من انتاج المصنع الثانى يساوى

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{189}{300} = 0{,}63$$

وبما ان من كل ١٠٠٠ مصباح يوجد ١٨٩ من انتاج المصنع الثانى ، وفى نفس الوقت تكون كلها مصابيح ذات خواص قياسية معينة ، فان احتمال وقوع الحادثتين $A$ ، $\overline{B}$ معا يساوى

$$P(A \text{ and } \overline{B}) = \frac{189}{1000} = \frac{300}{1000} \times \frac{189}{300} = P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)$$

ويمكن بسهولة تعميم « قاعدة الضرب » بحيث تشمل الحالة العامة لضرب الاحتمالات . لنفرض انه فى كل مجموعة من



العمليات عددها $n$ ، نحصل على النتيجة $B$ فى المتوسط ، $m$ مرة وفى كل مجموعة من العمليات عددها $m$ والتى حصلنا فيها على النتيجة $B$ نحصل ايضا على النتيجة $A$ بمقدار $l$ مرة . عندئذ ، ففى كل مجموعة من العمليات التى عددها $n$ ، تقع الحادثتان $A$ ، $B$ معا فى المتوسط $l$ مرة وبذلك يكون

$$P(B) = \frac{m}{n},\ P_B(A) = \frac{l}{m}$$

$$P(A \text{ and } B) = \frac{l}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m} = P(B)P_B(A) \qquad (1)$$

**قاعدة الضرب : ان احتمال وقوع حادثتين معا يساوى حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الاولى فى الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة الثانية ، محسوبا بفرض وقوع الحادثة الاولى .**

بالطبع يمكن اعتبار اية من الحادثتين كحادثة اولى ، اى انه يمكن ايجاد علاقة مشابهة للعلاقة ( 1 ) بنفس الطريقة وهى :

$$P(A \text{ and } B) = P(A)P_A(B) \qquad (1')$$

ومن ذلك نحصل على العلاقة الهامة التالية :

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \qquad (2)$$

وفى مثالنا السابق

$$P(A \text{ and } \overline{B}) = \frac{189}{1000},\ P(A) = \frac{77}{100},\ P_A(\overline{B}) = \frac{189}{770}$$

اى ان العلاقة $(1')$ تتحقق .

مثال : تعتبر ٩٦ ٪ من منتجات مصنع ما صالحة ( حادثة $A$ ) ومن بين كل ١٠٠ قطعة صالحة توجد فى المتوسط ٧٥ قطعة انتاج من الدرجة الاولى ( حادثة $B$ ) . اوجد احتمال ان تكون

قطعة ما من منتجات المصنع من الدرجة الاولى . اى ان المطلوب ايجاد $P(A \text{ and } B)$ ، اذ لكى تكون السلعة المنتجة من الدرجة الاولى ، يجب اولا ان تكون صالحة (حادثة A) وثانيا من الدرجة الأولى (حادثة $B$) . فمن شروط المسألة نرى ان :

$$P(A) = 0{,}96; \; P_A(B) = 0{,}75$$

ولذا فاننا نحصل من العلاقة ('1) على

$$P(A \text{ and } B) = 0{,}96 \times 0{,}75 = 0{,}72$$

## ٩ ـ الحوادث المستقلة

عند اختبار شدة متانة خيوط ماخوذة من شلتين مصنوعتين بماكينتين مختلفتين ، اتضح ان لخيوط الشلة الاولى طول ما يتحمل معدلا معينا من الاثقال باحتمال مقداره ٠,٨٤ والثانية باحتمال ٠,٧٨ * . اوجد احتمال ان تتحمل عينتان من خيوط مأخوذة من شلتين مختلفتين ، الثقل القياسى المعين .

نرمز الى الحادثة التى تتلخص فى ان العينة المأخوذة من خيط الشلة الاولى تتحمل الثقل المعدل بـ $A$ ، وبالرمز $B$ الى الحادثة المشابهة بالنسبة للعينة الثانية . وبما ان المطلوب هو ايجاد $P(A \text{ and } B)$ فبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على:

$$P(A \text{ and } B) = P(A)P_A(B)$$

---

* اذا كان معدل الاثقال يساوى ٤٠٠ جرام مثلا ، فهذا يعنى ان من كل مئة عينة مأخوذة من خيط الشلة الاولى ، هناك ٨٤ عينة فى المتوسط ، تتحمل هذا الثقل ، و١٦ منها لا تتحمله وتنقطع .



ومن الواضح هنا ، ان $P(A) = 0{,}84$ . ولكن ماذا تعنى $P_A(B)$ ؟ حسب التعريف العام للاحتمال المشروط ، فان $P_A(B)$ هى احتمال تحمل عينة الخيط من الشلة الثانية ، الثقل المعدل ، بشرط ان تكون عينة الشلة الاولى قد تحملته . ولكن احتمال وقوع الحادثة $B$ لا يعتمد على وقوع الحادثة $A$ ، وذلك لسبب بسيط وهو انه يمكن اجراء هذين الاختبارين فى نفس الوقت ، اما عينتا الخيط فيمكن اخذهما من شلتين مختلفتين تماما ومصنوعتين على آلتين مختلفتين ايضا . وهذا يعنى عمليا ، ان نسبة الاختبارات التى يتحمل فيها الخيط من الشلة الثانية ، الثقل المعدل ، لا تعتمد على مقدار متانة العينة من الشلة الاولى . اى ان :

$$P_A(B) = P(B) = 0{,}78$$

ومنه ينتج ان

$$P(A \text{ and } B) = P(A)P(B) = 0{,}84 \times 0{,}78 = 0{,}6552$$

ويختلف هذا المثال كما لاحظنا ، عن الامثلة السابقة فى ان احتمال الحصول على النتيجة $B$ هنا لا يتغير اذا ما اضفنا الى الشروط العامة شرطا آخر ، كى يتم وقوع الحادثة $A$ ، او بمعنى آخر ، ان الاحتمال المشروط $P_A(B)$ يساوى الاحتمال غير المشروط $P(B)$ . وهنا يمكننا القول باختصار : ان الحادثة $B$ لا تعتمد على الحادثة A .

ويمكن التأكد ببساطة ، من انه اذا كانت $B$ لا تعتمد على $A$ ، فان $A$ لا تعتمد على $B$ . وذلك لانه اذا كانت $P_A(B) = P(B)$ فانه من العلاقة (2) ينتج ان $P_B(A) = P(A)$ ايضا . وهذا يعنى ان الحادثة $A$ كذلك لا تعتمد على الحادثة $B$ . وهكذا ، فان عدم

اعتماد حادثتين على بعضهما ، ما هو الا خاصية متبادلة بينهما .
ونلاحظ هنا انه فى حالة الحادثتين المستقلتين عن بعض ، تأخذ قاعدة الضرب الشكل المبسط التالى :

$$P(A \text{ and } B) = P(A)P(B) \qquad (3)$$

وكما انه فى جميع تطبيقات قاعدة الجمع ، يجب التأكد مسبقا من ان الحوادث منافية كل منها للاخرى ، فانه هنا ايضا يجب التأكد من ان الحادثتين $A$ و $B$ مستقلتان عن بعض ، وذلك قبل اجراء اى تطبيق للعلاقة (3) . ان اهمال هذه الملاحظة يوقعنا فى خطأ كبير .

واذا كانت الحادثتان $A$ و $B$ معتمدتين على بعض ، فان العلاقة (3) تصبح غير صحيحة ويجب تغييرها باحدى العلاقتين (1) او (1') .

ويمكن تعميم العلاقة (3) على الحالات التى لا يطلب فيها ايجاد احتمال وقوع حادثتين فحسب ، بل ثلاث او اكثر ، مستقلة عن بعض .

لنفرض ان لدينا ثلاث حوادث مستقلة عن بعض $A$ ، $B$ ، $C$ (اى ان احتمال وقوع اى منها لا يعتمد على وقوع او عدم وقوع الحادثتين الاخرتين) . بما ان الحوادث $A$ ، $B$ ، $C$ مستقلة عن بعض فانه من القاعدة (3) تكون

$$P(A \text{ and } B \text{ and } C) = P(A \text{ and } B)P(C)$$

وبالتعويض فى هذه المعادلة عن الاحتمال $P(A \text{ and } B)$ من العلاقة (3) نجد ان :

$$P(A \text{ and } B \text{ and } C) = P(A)P(B)P(C) \qquad (4)$$



ومن الواضح ان هذه القاعدة صحيحة ايضا فى حالة ما اذا كنا ندرس مجموعة تحتوى على اى عدد من الحوادث ، على ان تكون هذه الحوادث مستقلة عن بعض (اى ان احتمال وقوع اية منها لا يعتمد على وقوع او عدم وقوع الحوادث الاخرى) .

**ان احتمال وقوع اى عدد من الحوادث المستقلة معا ، يساوى حاصل ضرب احتمالات وقوع كل حادثة على حدة .**

مثال ١ : يشتغل عامل على ثلاث ماكينات فى آن واحد . فاذا كان احتمال استغناء الماكينة عن العامل اثناء عملها لمدة ساعة واحدة يساوى : بالنسبة للماكينة الاولى ٠,٩ ، وبالنسبة للثانية ٠,٨ ، وبالنسبة للثالثة ٠,٨٥ ، اوجد احتمال استغناء جميع هذه الماكينات عن العامل خلال ساعة ما اثناء عملها .

لو فرضنا ان كل ماكينة لا تعتمد فى عملها على اية من الماكينات الاخرى ، فباستعمال العلاقة (4) نجد ان الاحتمال المطلوب يساوى

$$٠,٩ \times ٠,٨ \times ٠,٨٥ = ٠,٦١٢$$

مثال ٢ : تحت نفس شروط المثال السابق ، اوجد احتمال استغناء ماكينة واحدة على الاقل ، عن العامل خلال ساعة ما من الزمن . يدور الحديث هنا عن الاحتمال من نوع $P(A \text{ or } B \text{ or } C)$ . ولذلك ، فان اول ما يتبادر الى الذهن ، هو استعمال قاعدة جمع الاحتمالات . ولكننا نتأكد على الفور ، انه لا يصح تطبيق هذه القاعدة فى مثل هذه الحالة ، وذلك لان اية حادثتين من هذه الحوادث ، متطابقتان (يمكن وقوعهما معا ، اذ ليس هناك ما يمنع ان تعمل ماكينتان فى نفس الوقت خلال ساعة من الزمن)

وحتى بدون هذه الملاحظة ، يمكن بسرعة ، ملاحظة ان مجموع هذه الاحتمالات اكبر من الواحد الصحيح . ولذا ، فان اى احتمال بهذه الطريقة ليس له معنى .

ولحل هذا المثال نلاحظ ان احتمال ان تتطلب الماكينة اهتمام العامل بها ، يساوى ٠,١ بالنسبة للماكينة الاولى ، ٠,٢ للثانية ، ٠,١٥ للثالثة ، وبما ان جميع هذه الحوادث مستقلة عن بعض ، فان احتمال وقوع جميع هذه الحوادث الثلاث ، حسب العلاقة (4) يساوى

٠,١ × ٠,٢ × ٠,١٥ = ٠,٠٠٠٣

ولكن الحادثة — جميع الماكينات تتطلب اهتمام العامل ، والحادثة — ماكينة واحدة على الاقل ، تتطلب اهتمام العامل ، تكونان زوجا من الحوادث المتناقضة . ولذلك ، فان مجموع احتماليهما يساوى واحدا صحيحا . وعلى ذلك ، فان الاحتمال المطلوب يساوى ١ — ٠,٠٠٠٣ = ٠,٩٩٩٧ .

وعندما يكون احتمال وقوع حادثة ما قريبا جدا من الواحد ، فانه يمكن اعتبار هذه الحادثة مؤكدة عمليا ، وهذا يعنى ان ماكينة واحدة على الاقل من الماكينات الثلاث تعمل دائما لمدة ساعة من الزمن تقريبا مستغنية عن العامل .

مثال ٣ : فى احد معامل الاختبار وتحت ظروف معينة ، اجرى اختبار ٢٥٠ جهازا . وكان احتمال توقف جهاز معين من هذه الاجهزة عن العمل خلال ساعة يساوى ٠,٠٠٤ . فلو فرضنا ان هذا الاحتمال ثابت بالنسبة لجميع الاجهزة . اوجد احتمال توقف ولو جهاز واحد عن العمل ، خلال ساعة .



ان احتمال عدم توقف اى جهاز عن العمل يساوى :

١ — ٠,٠٠٤ = ٠,٩٩٦

ومن قاعدة الضرب للحوادث المستقلة ، نجد ان احتمال الا يتلف اى من الاجهزة المئتين والخمسين التى تحت الاختبار ، يساوى حاصل ضرب المقدار (٠,٩٩٦) فى نفسه ٢٥٠ مرة ، اى يساوى (٠,٩٩٦)٢٥٠ .

وعلى ذلك ، فان احتمال توقف جهاز واحد على الاقل عن العمل يساوى

١ — (٠,٩٩٦)٢٥٠

اننا لن نجرى حساب هذا المقدار هنا ، ولكننا سنكتب النتيجة مباشرة وتساوى $\frac{٥}{٨}$ تقريبا . وبالرغم من ان احتمال توقف اى من هذه الاجهزة عن العمل خلال ساعة ، غير كبير ، الا انه عند اجراء اختبار عدد كبير من الاجهزة ، يصبح احتمال توقف ولو جهاز واحد منها كبيرا جدا .

ويمكن بكل بساطة ، تعميم الطريقة التى استخدمناها فى حل المثالين الاخيرين ، كى نصل الى قاعدة عامة هامة . ففى هاتين الحالتين ، تحدثنا عن احتمال $P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or} \ldots, \text{ or } A_n)$ وقوع حادثة واحدة على الاقل من الحوادث المستقلة $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ واذا عبرنا بالرمز $\overline{A}_k$ عن الحادثة الدالة على عدم وقوع $A_k$ ، فان $A_k$ و $\overline{A}_k$ تعتبران حادثتين متناقضتين . اى ان

$$P(A_k) + P(\overline{A}_k) = 1$$

ومن ناحية اخرى تكون الحوادث $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n)$ بالطبع ، مستقلة عن بعض . اى ان :

$$P(\bar{A}_1 \text{ and } \bar{A}_2 \text{ and} \ldots, \text{ and } \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n) = \\ =[1-P(A_1)][1-P(A_2)]\ldots[1-P(A_n)]$$

واخيرا ، من الواضح ان الحادثتين $(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or} \ldots, \text{ or } A_n)$ و $(\bar{A}_1 \text{ and } \bar{A}_2 \text{ and} \ldots, \text{ and } \bar{A}_n)$ متناقضتان (حيث انه يحدث احد امرين: اما ان تقع حادثة واحدة على الاقل من الحوادث $A_n$ ، او ان تقع جميع الحوادث $\bar{A}_n$ ) . ولذا ، فان

$$P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or} \ldots \text{ or } A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \text{ and } \bar{A}_2 \text{ and} \ldots \text{ and} \bar{A}_n) = \\ = 1-[1-P(A_1)]\cdot[1-P(A_2)]\ldots[1-P(A_n)] \quad (5)$$

ولا تكون هذه المعادلة الهامة التى تتيح لنا ايجاد احتمال وقوع حادثة واحدة على الاقل ، من الحوادث $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ بمعلومية احتمال وقوع كل من هذه الحوادث صحيحة ، الا اذا كانت جميع هذه الحوادث مستقلة عن بعض . وفى الحالة الخاصة ، عندما تكون احتمالات وقوع كل الحوادث $A_n$ متساوية ، وتساوى $p$ مثلا ( كما حدث فى المثال الثالث ) فان

$$P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } \ldots \text{ or } A_n) = 1-(1-p)^n \qquad (6)$$

مثال ٤ : تصنع قطع جهاز معين على شكل متوازى مستطيلات . وتعتبر القطعة صالحة ، اذا كان طول ضلع من اضلاعها يختلف عن المقياس المحدد له بمقدار لا يزيد عن ٠٫٠١ مم .

فاذا كان احتمال كون الاختلافات تزيد عن ٠٫٠١ مم يساوى :



بالنسبة للطول — $p_1 = 0{,}08$

بالنسبة للعرض — $p_2 = 0{,}12$

بالنسبة للارتفاع — $p_3 = 0{,}1$

اوجد احتمال $P$ كون القطعة غير صالحة .

لكى تكون القطعة غير صالحة ، يجب ان يكون الاختلاف عن المقياس المحدد لاحد الابعاد الثلاث اكبر من ٠٫٠١ مم على الاقل . وبما انه يمكن اعتبار هذه الحوادث الثلاث مستقلة فيما بينها (وذلك لان كلا منها يحدث لاسباب مختلفة عن الاخرى ) فلحل هذا المثال ، يمكن استعمال العلاقة (5) ، التى نجد منها ان :

$$P = 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \approx 0{,}27$$

وعلى هذا الاساس ، يمكن اعتبار انه من بين كل ١٠٠ قطعة ، هناك ٧٣ قطعة صالحة فى المتوسط .

الباب الرابع

# نتائج قواعد الجمع والضرب

## ١٠ – استنتاج بعض المتباينات

نعود من جديد الى مثال المصابيح الوارد فى الباب السابق (صفحة ٣٢)، ونرمز الى الحوادث الآتية كما يلى :

$A$ – مصباح قياسى الصنع (نموذجى)
$\bar{A}$ – مصباح غير قياسى الصنع
$B$ – مصباح مصنوع فى المصنع الاول
$\bar{B}$ – مصباح مصنوع فى المصنع الثانى

تشكل الحادثتان $A$ ، $\bar{A}$ بالطبع زوجا من الحوادث المتناقضة وكذلك الامر بالنسبة للحادثتين $B$ ، $\bar{B}$ .

اذا كان المصباح قياسيا $(A)$ ، فانه اما ان يكون مصنوعا فى المصنع الاول $(A \text{ and } B)$ او فى المصنع الثانى $(A \text{ and } \bar{B})$ وبما ان الحادثتين الاخيرتين منافيتان لبعضهما ، فاننا نحصل من قاعدة الجمع على

$$P(A) = P(A \text{ and } B) + P(A \text{ and } \bar{B}) \qquad (1)$$

وبنفس الطريقة ، نجد ان :

$$P(B) = P(A \text{ and } B) + P(\bar{A} \text{ and } B) \qquad (2)$$



واخيرا لندرس الحادثة $(A \text{ or } B)$ . يتحقق وقوع هذه الحادثة فى الحالات الثلاث الممكنة التالية :

1) $A$ and $B$,
2) $A$ and $\bar{B}$,
3) $\bar{A}$ and $B$;

وتكون اية حالتين من هذه الحالات الثلاث ، منافيتين لبعضهما البعض ولذا ، فاننا نحصل من قاعدة الجمع على :

$$P(A \text{ or } B) = P(A \text{ and } B) + P(A \text{ and } \bar{B}) + P(\bar{A} \text{ and } B) \qquad (3)$$

وبجمع المعادلتين (1) و (2) حدا حدا ، وباستخدام المعادلة (3) نحصل على :

$$P(A) + P(B) = P(A \text{ and } B) + P(A \text{ or } B)$$

ومن ذلك نحصل على :

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B) \qquad (4)$$

وهكذا نكون قد حصلنا على نتيجة هامة جدا ، ولو اننا درسنا مثالا خاصا ، الا انه كان عاما الى درجة بحيث يمكن اعتبار هذه النتيجة صحيحة لاى زوج من الحوادث $(A \text{ and } B)$ . لقد حصلنا حتى الآن على مقدار للاحتمال $P(A \text{ or } B)$ فقط تحت شروط خاصة جدا فرضت على الارتباط بين الحادثتين (افترضنا اولا انهما متنافيتان ثم افترضنا بعد ذلك انهما مستقلتان) .

ان العلاقة (4) التى حصلنا عليها الآن صحيحة لاى زوج من الحوادث $(A \text{ and } B)$ بدون اية شروط اضافية. وفى الحقيقة، يجب الا ننسى اختلافا هاما بين العلاقة (4) والعلاقات التى حصلنا عليها سابقا . ان العلاقات التى اوردناها سابقا للاحتمال $P(A \text{ or } B)$

كانت دائما معتمدة فقط على $P(A)$ ، $P(B)$ ، اى انه بمعرفة احتمال وقوع الحادثتين $A$ ، $B$ يمكن ايجاد القيمة الوحيدة لاحتمال وقوع الحادثة $(A \ or \ B)$ . وبالنسبة للعلاقة (4) فان الامر مختلف اذ لكى نحسب المقدار $P(A \ or \ B)$ يجب معرفة $P(A \ and \ B)$ علاوة على $P(A)$ ، $P(B)$ . اى معرفة احتمال وقوع الحادثتين $A$ ، $B$ معا . وفى الحالة العامة ، اى عند اية علاقة تربط بين $A$ ، $B$ لا يكون ايجاد الاحتمال $P(A \ and \ B)$ اقل صعوبة من ايجاد الاحتمال $P(A \ or \ B)$ . ولذا ، فمن الناحية العملية قليلا ما تستعمل العلاقة (4) فى الحسابات مباشرة، الا ان لها قيمة نظرية كبيرة .

وسنتأكد اولا من انه يمكن الحصول على العلاقات السابقة كحالة خاصة ، من العلاقة (4) . فاذا كانت الحادثتان $A$ ، $B$ منافيتين لبعضهما ، فان حدوثهما معا يصبح مستحيلا . اى ان $P(A \ and \ B) = 0$ وتصبح العلاقة (4) على الصورة التالية :

$$P(A \ or \ B) = P(A) + P(B)$$

وهى علاقة جمع الاحتمالات .

واذا كانت الحادثتان $A$ ، $B$ مستقلتين عن بعضهما ، فباستعمال العلاقة (3) ، ( صفحة ٤٠ ) ، نحصل على :

$$P(A \ and \ B) = P(A)P(B)$$

ومن العلاقة (4) فان

$$P(A \ or \ B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

وهى العلاقة (5) المذكورة فى صفحة ٤٤ ( فى حالة ما اذا كانت $n = 2$). والآن نستنتج من العلاقة (4) نتيجة هامة . بما انه فى



جميع الحالات تكون $P(A \ and \ B) \geq 0$، ينتج من العلاقة (4) فى جميع الحالات ان :

$$P(A \ or \ B) \leqslant P(A) + P(B) \qquad (5)$$

ويمكن تعميم هذه المتباينة على اى عدد من الحوادث . فعلى سبيل المثال ، اذا كانت هناك ثلاث حوادث $A$ ، $B$ ، $C$ فمن العلاقة (5) ينتج ان :

$$P(A \ or \ B \ or \ C) \leqslant P(A \ or \ B) + P(C) \leqslant P(A) + P(B) + P(C)$$

وبنفس الطريقة يمكن تعميم العلاقة (5) على اربع حوادث ( باستعمال نفس العلاقة المستعملة فى حالة ثلاث حوادث ) ، وهكذا .

وبذلك نحصل على نتيجة عامة وهى :

**ان احتمال وقوع حادثة واحدة على الاقل من مجموعة حوادث. لا يزيد ابدا عن مجموع احتمالات وقوع كل حادثة على حدة .**

وبذلك تتساوى هاتان الكميتان اذا كانت كل حادثتين من هذه الحوادث متنافيتين مع بعضهما .

## ١١ ـ علاقة الاحتمالات المتكاملة

نعود الآن الى مثال المصابيح على الصفحة ( ٣٢ ) وسنشير الى نتائج الاختبارات المختلفة بالرموز الواردة على الصفحة ( ٤٦ ) . ان احتمال كون المصباح نموذجى الصنع بشرط ان يكون من انتاج المصنع الثانى كما رأينا اكثر من مرة ، يساوى

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{189}{300} = 0,63$$

واحتمال وقوع نفس الحادثة بشرط ان يكون المصباح من انتاج المصنع الاول يساوى :

$$P_B(A) = \frac{581}{700} = 0,83$$

لنفرض ان هذين العددين معلومان ، وان احتمال كون المصباح من انتاج المصنع الاول هو $P(B) = 0,7$ واحتمال كونه من انتاج المصنع الثانى هو $P(\bar{B}) = 0,3$ . المطلوب هو ايجاد الاحتمال غير المشروط $P(A)$ ، اى احتمال كون المصباح نموذجى الصنع بصرف النظر عن مكان انتاجه .

لحل هذه المسألة سنتبع الآتى : نرمز الى الحادثة الثنائية التى تدل على ان : ١ – المصباح من انتاج المصنع الاول ، ٢ – المصباح النموذجى الصنع ، ؛ $E$ . وبالرمز $F$ ، الى نفس الحادثة بالنسبة للمصنع الثانى . وحيث ان اى مصباح نموذجى الصنع اما ان يكون من انتاج المصنع الاول او المصنع الثانى ، فان الحادثة $A$ مكافئة للحادثة $(E \text{ or } F)$ ، وحيث ان الحادثتين $E$ ، $F$ متنافيتان مع بعضهما ، فباستعمال قاعدة الجمع يكون

$$P(A) = P(E) + P(F) \qquad (6)$$

ومن ناحية اخرى ، لكى تقع الحادثة $E$ يجب :
١ – ان يكون المصباح من انتاج المصنع الاول $(B)$ ، ٢ – ان يكون نموذجى الصنع $(A)$ . ولذلك فان الحادثة $E$ مكافئة للحادثة $(B \text{ and } A)$ . وباستعمال قاعدة الضرب ينتج من هذا ان :

$$P(E) = P(B)P_B(A)$$

وبنفس الطريقة تماما ، نجد ان :

$$P(F) = P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$$



وبالتعويض عن هذه المقادير فى العلاقة (6) نجد ان

$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$$

وتعطينا هذه العلاقة حلا لهذه المسألة .
وبالتعويض عدديا ، نجد ان $P(A) = 0,77$.

مثال . اعدت للبذار كمية من حبوب القمح منتقاة من النوع الاول وكانت تحتوى على خليط من النوع الثانى والثالث والرابع . نأخذ حبة واحدة من هذه البذور . ونرمز الى الحادثة الدالة على ان هذه الحبة من النوع الاول ؛ $A_1$ ، ومن الثانى ؛ $A_2$ ، ومن الثالث ؛ $A_3$ ، واخيرا من النوع الرابع ؛ $A_4$ . ومعلوم ان احتمالات كون الحبة المأخوذة عشوائيا من نوع أو آخر ، تساوى على التوالى :

$$P(A_1) = 0,96;\ P(A_2) = 0,01;\ P(A_3) = 0,02;\ P(A_4) = 0,01$$

( مجموع هذه الاحتمالات الاربعة يساوى واحدا صحيحا كما هو المفروض بالنسبة لمجموعة الحوادث المتكاملة ) .
واحتمال ان تنمو من بذرة القمح سنبلة تحتوى على ٥٠ حبة على الاقل يساوى :

١ ) ٠,٥٠ من بذور النوع الاول
٢ ) ٠,١٥ من بذور النوع الثانى
٣ ) ٠,٢٠ من بذور النوع الثالث
٤ ) ٠,٠٥ من بذور النوع الرابع

أوجد الاحتمال غير المشروط لاحتواء السنبلة على ٥٠ حبة على الاقل .

نفرض ان $K$ هى الحادثة الدالة على ان السنبلة تحتوى على ٥٠ حبة على الاقل . ومن شروط المسألة نجد ان :

$$P_{A_1}(K) = 0{,}50;\ P_{A_2}(K) = 0{,}15;$$
$$P_{A_3}(K) = 0{,}20;\ P_{A_4}(K) = 0{,}05.$$

والمطلوب ايجاد $P(K)$ . نرمز الى الحادثة الدالة على ان الحبة من النوع الاول وانها تعطى سنبلة تحتوى على ٥٠ حبة على الاقل ، $E_1$ . وعلى ذلك ، فان $E_1$ مكافئة للحادثة ( $A_1$ and $K$ ) وبنفس الطريقة نستعمل الرموز التالية :

$E_2$ للحادثة ( $A_2$ and $K$ )
$E_3$ للحادثة ( $A_3$ and $K$ )
$E_4$ للحادثة ( $A_4$ and $K$ )

وبالطبع ، وحتى تقع الحادثة K . يجب ان تقع احدى الحوادث ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ ) وحيث ان اية اثنتين من هذه الحوادث متنافيتان مع بعضهما ، فباستعمال قاعدة الجمع نجد ان

$$P(K) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) \qquad (7)$$

ومن ناحية اخرى ، باستعمال قاعدة الضرب نجد ان

$$P(E_1) = P(A_1 \text{ and } K) = P(A_1)P_{A_1}(K)$$
$$P(E_2) = P(A_2 \text{ and } K) = P(A_2)P_{A_2}(K)$$
$$P(E_3) = P(A_3 \text{ and } K) = P(A_3)P_{A_3}(K)$$
$$P(E_4) = P(A_4 \text{ and } K) = P(A_4)P_{A_4}(K)$$

بالتعويض عن هذه المقادير فى العلاقة (7) ، نجد ان

$$P(K) = P(A_1)P_{A_1}(K) + P(A_2)P_{A_2}(K) + P(A_3)P_{A_3}(K) + P(A_4)P_{A_4}(K)$$

وهى العلاقة التى تعطينا حلا للمسألة .

وبالتعويض العددى ، نجد ان $P(K) = 0{,}486$ .



ويؤكد لنا المثالان اللذان درسناهما الآن بالتفصيل ، قاعدة عامة وهامة . ويمكن الآن صياغة واثبات هذه القاعدة بدون اية صعوبة .

لنفرض ان احدى العمليات يمكن ان تعطينا النتائج ( $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ ). التى تكون مجموعة متكاملة من الحوادث . ( ولنتذكر ثانية ، ان هذا يعنى ان اية اثنتين من هذه الحوادث متنافيتان مع بعضهما ، وانه لا بد وان تقع اية منهما ) وبذلك فان العلاقة التالية صحيحة لاية نتيجة $K$ ممكنة من نتائج هذه العملية :

$$P(K) = P(A_1)P_{A_1}(K) + P(A_2)P_{A_2}(K) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(K) \quad (8)$$

وتسمى هذه العلاقة (8) عادة بعلاقة الاحتمال المتكامل . وطريقة اثباتها هى بالضبط كما اوضحنا فى المثالين السابقين : أولا ، يتطلب وقوع الحادثة $K$ ، وقوع احدى الحوادث ( $A_i$ and $K$ ) وباستعمال قاعدة الجمع ينتج ان

$$P(K) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \text{ and } K) \qquad (9)$$

ثانيا ، باستعمال قاعدة الضرب نجد ان

$$P(A_i \text{ and } K) = P(A_i)P_{A_i}(K)$$

بالتعويض عن هذه المقادير فى العلاقة (9) نحصل على العلاقة (8) .

## ١٢ ــ علاقة بييس

تسمح العلاقة التى حصلنا عليها فى البند السابق باستنتاج علاقة اخرى هامة لها تطبيقات عملية كثيرة . سنبدأ اولا بالاستنتاج الشكلى

لهذه العلاقة ونترك شرح المعنى الحقيقى للعلاقة النهائية مؤقتا ، كى نعود اليه عند شرح الامثلة .

نفرض من جديد ان الحوادث $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ هى مجموعة متكاملة من نتائج عملية ما . واذا كانت $K$ عندئذ نتيجة ما من نتائج هذه العملية ، فانه من قاعدة الضرب ينتج ان

$$P(A_i \text{ and } K) = P(A_i)P_{A_i}(K) = P(K)P_K(A_i)(1 \leqslant i \leqslant n),$$

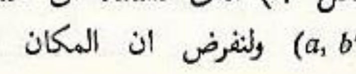
ومن هنا نجد ان :

$$P_K(A_i) = \frac{P(A_i)\,P_{A_i}(K)}{P(K)}(1 \leqslant i \leqslant n),$$

واذا ما عبرنا عن المقام في العلاقة الاخيرة باستعمال علاقة الاحتمال المتكامل (8) من البند السابق نجد ان :

$$P_K(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(K)}{\sum_{r=1}^{n} P(A_r)P_{A_r}(K)}(1 \leqslant i \leqslant n) \qquad (10)$$

وتسمى هذه العلاقة بعلاقة بييس التى لها تطبيقات كثيرة فى عمليات حساب الاحتمالات . وفى الاغلب ، تستعمل هذه العلاقة فى الحالات المشابهة للحالة التى سنوضحها بالمثال التالى .




شكل ٣

نفرض انه يجرى اطلاق النار على هدف موضوع على الخط المستقيم $MN$ ( شكل ٣ ) الذى قسمناه الى خمسة اجزاء صغيرة هى: $(a, b', b'', c', c'')$ ولنفرض ان المكان الصحيح للهدف



غير معلوم . الا اننا نعلم فقط احتمالات كون الهدف موضوعا على كل من هذه الاجزاء الخمسة . ونفرض ان هذه الاحتمالات كالتالى :

$$P(a) = 0{,}48;\ P(b') = P(b'') = 0{,}21;\ P(c') = P(c'') = 0{,}05,$$

حيث اننا رمزنا بالحروف $(a, b', b'', c', c'')$ الى الحوادث التالية : يوجد الهدف على الجزء $a$ أو $b'$ أو $b''$ أو $c'$ أو $c''$ ( حاصل جمع هذه الاعداد يساوى واحدا صحيحا ) ويناظر الاحتمال الاكبر الجزء $a$. وبناء على ذلك ، فاننا بالطبع نوجه الطلقة الى هذا الجزء . ولكن بسبب الخطأ الحتمى فى التصويب ، يمكن ان نصيب الهدف حتى اذا كان موجودا على اى من الاجزاء الاخرى وليس على الجزء $a$ . ولنفرض ان احتمال اصابة الهدف ( حادثة $K$ ) يساوى :

$P_a(K) = 0{,}56$ اذا وجد الهدف على الجزء $a$

$P_{b'}(K) = 0{,}18$ اذا وجد الهدف على الجزء $b'$

$P_{b''}(K) = 0{,}16$ اذا وجد الهدف على الجزء $b''$

$P_{c'}(K) = 0{,}06$ اذا وجد الهدف على الجزء $c'$

$P_{c''}(K) = 0{,}02$ اذا وجد الهدف على الجزء $c''$

نفرض اننا قد اطلقنا الرصاصة فعلا ، وان الهدف قد اصيب ( وقوع الحادثة $K$ ) . نتيجة لهذا ، تتغير قيم احتمالات ( التى كانت لدينا سابقا ) وجود الهدف فى الاجزاء المختلفة ، اى الاعداد ( $P(a), P(b'), \dots$ ). ان نوعية هذا التغير واضحة بدون حسابات . ففى هذه الحالة ، اطلقنا النار على الجزء a واصبنا الهدف . ومن

الواضح ان الاحتمال $P(a)$ يزيد ، ولكننا نريد هنا تحديد كمية هذا التغير بالضبط ، اى نريد ايجاد قيمة دقيقة لمقادير الاحتمالات $(P_K(a), P_K(b'), \dots)$، اى احتمال وجود الهدف فى الاجزاء المختلفة بشرط ان هذا الهدف قد اصيب بالطلقة التى اطلقت . وتعطينا علاقة بيبس (10) اجابة سريعة على هذا السؤال :

$$P_K(a) = P(a)P_a(K)[P(a)P_a(K) + P(b')P_{b'}(K) + P(b'')P_{b''}(K) + P(c')P_{c'}(K) + P(c'')P_{c''}(K)]^{-1} \approx 0{,}8$$

من هنا نرى ان $P_K(a)$ فى الواقع اكبر من $P(a)$ .

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد $(P_K(b'),\dots)$ ، اى احتمال وجود الهدف فى اجزاء اخرى . ومن المفيد ان نلاحظ اثناء اجراء مثل هذه الحسابات ، ان المقام ثابت فيها جميعا ، وهو يساوى $P(K) \approx 0{,}34$ . اما البسط فيتغير من احتمال لآخر .

ويمكن شرح القاعدة العامة لمثل هذه الحالات كالتالى :

تحتوى شروط العملية على عامل ما يمكن ان نضع بالنسبة له $n$ من الفروض المختلفة (hypothesis) $A_1, A_2, \dots, A_n$: وهى تكون مجموعة متكاملة من الحوادث . ولسبب او لآخر ، نعلم الاحتمالات $P(A_i)$ لهذه الفروض قبل اجراء التجربة ، ومعلوم ايضا ان الفرض $A_i$ «يعين» حادثة معنية $K$ (اصابة الهدف مثلا) بالاحتمال $P_{A_i}(K)$ حيث $P_{A_i}(K) (1 \leq i \leq n)$ هو احتمال وقوع الحادثة $K$ محسوبا تحت شرط ان الفرض $A_i$ صحيح ) . واذا كانت نتيجة التجربة تدل على وقوع الحادثة $K$ فهذا يستدعى اعادة تقييم احتمالات الفروض $A_i$ وتتلخص المسألة فى ايجاد احتمالات جديدة $P_K(A_i)$ لهذه الفروض . وتعطينا علاقة بيبس الاجابة على هذه المسألة .



وعند التدريب على الاطلاق بالمدافع تطلق قذائف تجريبية يستهدف منها زيادة الدقة فى معلوماتنا عن ظروف اطلاق النار . فى هذه الحالة يمكن ان نعتبر ان العامل المجهول الذى يتطلب ايجاده ، ليس موضع الهدف فقط ، بل وكذلك اى عامل من العوامل التى يعتمد عليها اطلاق النار والذى يؤثر على كفاءته ( خاصة مميزات الاسلحة المختلفة المستعملة )

غالبا لا تحدث مثل هذه التجارب مرة واحدة فقط ، بل عدة مرات . وتطرح المسألة حول حساب احتمالات جديدة للفروض على اساس النتائج التى حصلنا عليها فى تجارب اطلاق النار . وفى جميع هذه الحالات ايضا يمكن ان تعطينا علاقة بيبس اجابة على هذه المسألة .

ولاختصار الكتابة ، نفرض انه فى القاعدة التى ندرسها

$$P(A_i) = P_i, P_{A_i}(K) = p_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

وبذلك تأخذ علاقة بيبس الصورة البسيطة الآتية :

$$P_h(A)_i = \frac{P_i p_i}{\sum_{r=1}^{n} P_r p_r}$$

نفرض اننا اجرينا $s$ من مثل هذه التجارب * بحيث ان النتيجة $K$ حدثت $m$ مرة ولم تحدث $(s-m)$ مرة ، ونرمز الى نتيجة الحصول على نتائج مجموعة من $s$ من التجارب بـ $K^*$ . ويمكن ان نفترض ان نتيجة التجارب المنفردة تعتبر حوادث مستقلة عن بعض . واذا كان الفرض $A_i$ صحيحا ، فان احتمال النتيجة $K$ يساوى $p_i$ وهذا

* التجربة هنا تعنى عملية اطلاق النار – ملاحظة المترجم .

يعنى ان احتمال وقوع الحادثة المناقضة ( اى عدم حدوث النتيجة $K$ ) يساوى $1 - p_i$ .

ونرى ان احتمال حدوث النتيجة $K$ فى كل من $m$ من التجارب المحددة يكون حسب قاعدة الضرب للحوادث المستقلة مساويا $p_i^m(1-p_i)^{s-m}$ وبما ان هذه الـ $m$ تجربة ، يمكن ان تكون اية من الـ $s$ تجربة ، التى اجريناها ، فان الحادثة $K^*$ يمكن ان تقع بعدد من الطرق المتنافية ، يساوى $\binom{s}{m}$ . وعلى ذلك فمن قاعدة جمع الاحتمالات ينتج ان :

$$P_{A_i}(K^*) = \binom{s}{m} p_i^m(1-p_i)^{s-m} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

وتعطينا علاقة بييس :

$$P_{K^*}(A_i) = \frac{P_i p_i^m(1-p_i)^{s-m}}{\sum_{r=1}^{n} P_r p_r^m(1-p_r)^{s-m}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \qquad (11)$$

وهذه هى الاجابة المطلوبة للمسألة . ومن الواضح ان مثل هذه المسائل تظهر فى جميع المجالات العملية ، وليس فقط فى مجال تدريب جندى المدفعية .

مثال ١ . فى المسألة التى درسناها فى بداية هذا البند ، اوجد احتمال ان يكون الهدف موجودا فى المنطقة $a$ ، اذا اصابت طلقتان متتاليتان هذه المنطقة .

نرمز الى الحادثة الدالة على اصابة الهدف مرتين متتاليتين بـ $K^*$. وحسب العلاقة (11) نجد ان

$$P_{K^*}(a) = \frac{P(a)[P_a(K)]^2}{P(a)[P_a(K)]^2 + P(b')[P_{b'}(K)]^2 + \dots};$$



وسنترك للقارئ اجراء بعض الحسابات والتأكد من انه نتيجة لاصابة هذه المنطقة مرتين متتاليتين . يزداد احتمال كون الهدف موضوعا فى المنطقة $a$ .

مثال ٢ . فى عملية انتاج بعض السلع ، يكون احتمال كون السلعة قياسية مساويا ٠,٩٦ ويفترض نظام مبسط للاختبارات * يعطى للسلع القياسية نتيجة ايجابية باحتمال يساوى ٠,٩٨ وللسلع غير القياسية باحتمال يساوى ٠,٠٥ فقط . فما هو احتمال ان تحقق السلعة ، التى نجحت فى الاختبار مرتين ، المواصفات المطلوبة ؟

ان المجموعة المتكاملة من الفروض تتكون هنا من حادثتين متناقضتين : ١ ) سلعة تحقق المعدل القياسى المطلوب ، ٢ ) سلعة لا تحقق المعدل القياسى المطلوب . ويكون احتمالا هذين الفرضين قبل اجراء التجربة ، مساويين على التوالى

$$P_1 = 0{,}96; P_2 = 0{,}04$$

واحتمال ان تنجح السلعة فى التجربة اذا ما تحقق الفرض الاول يساوى $p_1 = 0{,}98$ واذا ما تحقق الفرض الثانى يساوى $p_2 = 0{,}05$ .

---

* كثيرا ما نقابل فى الحياة العملية ظروفا يكون من الضرورى عندها تبسيط عملية الاختبار . فلو اختبرنا امكانية المصابيح الكهربائية للاشتعال طيلة مدة معينة لا تقل عن ١٢٠٠ ساعة ، وذلك قبل ان نعرضها للبيع فى السوق ، واستمرت عملية اختبار مدة اشتعالها ١٢٠٠ ساعة ، لحصل المشترى على مصابيح محروقة او تقريبا محروقة ، ونضطر فى مثل هذه الحالات الى ابدال اختبار مدة اشتعال المصباح بتجربة اخرى هى اختبار امكانية المصباح على الاشتعال فقط .

وباستخدام العلاقة (11) يكون احتمال الفرض الاول بعد اجراء تجربتين مساويا :

$$\frac{P_1p_1^2}{P_1p_1^2+P_2p_2^2}=\frac{0{,}96\cdot(0{,}98)^2}{0{,}96\cdot(0{,}98)^2+0{,}04\cdot(0{,}05)^2}\approx 0{,}9999$$

وهنا نرى انه اذا نجحت السلعة فى التجربتين المذكورتين فى المسألة ، فانه يمكن ان نخطئ فى حالة واحدة فقط من عشرة آلاف حالة ونعتبر فيها السلعة قياسية . وهذا بالطبع يحقق المتطلبات العملية .

مثال ٣ . بعد اجراء فحص مريض ما ، برز شك فى ان يكون هذا المريض مصابا باحد الامراض الثلاثة : $A_1, A_2, A_3$ واحتمالاتها حسب ظروف الفحص هى :

$$P_1=\frac{1}{2};\quad P_2=\frac{1}{6};\quad P_3=\frac{1}{3}$$

ولزيادة دقة التشخيص ، اجريت بعض التحاليل كى تعطينا نتيجة ايجابية باحتمال يساوى ٠,١ فى حالة الاصابة بالمرض $A_1$ ، وباحتمال يساوى ٠,٢ فى حالة الاصابة بالمرض $A_2$ ، وباحتمال يساوى ٠,٩ فى حالة الاصابة بالمرض $A_3$ . وقد اجرى التحاليل خمس مرات ، واعطى اربع نتائج ايجابية ونتيجة واحدة سلبية . اوجد احتمال وجود كل مرض من الامراض بعد اجراء التحليل .

فى حالة الاصابة بالمرض $A_1$ نرى ان احتمال نتائج هذه التحاليل يساوى حسب قاعدة الضرب $p_1=\binom{5}{4}\cdot(0{,}1)^4\cdot(0{,}9)$. وفى حالة الفرض الثانى ، فان هذا الاحتمال يساوى $p_2=\binom{5}{4}\cdot(0{,}2)^4\cdot(0{,}8)$ وللثالث : $p_3=\binom{5}{4}\cdot(0{,}9)^4\cdot(0{,}1)$ .



وباستخدام علاقة بييس نجد ان احتمال وجود المرض $A_1$ بعد اجراء التحاليل يساوى :

$$\frac{P_1p_1}{P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(0{,}1)^4\cdot 0{,}9}{\frac{1}{2}\cdot(0{,}1)^4\cdot 0{,}9+\frac{1}{6}\cdot(0{,}2)^4\cdot 0{,}8+\frac{1}{3}\cdot(0{,}9)^4\cdot 0{,}1}\approx 0{,}002;$$

وان احتمال الاصابة بالمرض $A_2$ يساوى :

$$\frac{P_2p_2}{P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3}=\frac{\frac{1}{6}\cdot(0{,}2)^4\cdot 0{,}8}{\frac{1}{2}\cdot(0{,}1)^4\cdot 0{,}9+\frac{1}{6}\cdot(0{,}2)^4\cdot 0{,}8+\frac{1}{3}\cdot(0{,}9)^4\cdot 0{,}1}\approx 0{,}01;$$

واحتمال الاصابة بالمرض $A_3$ يساوى :

$$\frac{P_3p_3}{P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3}=\frac{\frac{1}{3}\cdot(0{,}9)^4\cdot 0{,}1}{\frac{1}{2}\cdot(0{,}1)^4\cdot 0{,}9+\frac{1}{6}\cdot(0{,}2)^4\cdot 0{,}8+\frac{1}{3}\cdot(0{,}9)^4\cdot 0{,}1}\approx 0{,}988$$

وبما ان هذه الحوادث الثلاث $(A_1, A_2, A_3)$ تكون بعد التجربة كذلك مجموعة متكاملة من الحوادث ، فانه يمكن جمع الاعداد الثلاثة التى حصلنا عليها وذلك لاختبار صحة الحسابات وسنتأكد من ان مجموعها كالسابق ، يساوى واحدا صحيحا .

# توزيع برنولى

## ١٣ ـ امثلة

مثال ١ . بين مجموعة من تيلات قطن من نوع معين ، يوجد فى المتوسط ٧٥ ٪ منها بطول اقل من ٤٥ مليمترا و٢٥ ٪ طولها اكثر من ( او يساوى ) ٤٥ مم . اوجد احتمال انه من بين ثلاث تيلات مأخوذة عشوائيا ، توجد اثنتان اقصر وواحدة اطول من ٤٥ مم .

نرمز الى الحادثة ـ اختيار تيلة طولها اقل من ٤٥ مم بـ $A$ ، والى الحادثة ـ اختيار تيلة طولها اكثر من ٤٥ مم بـ $B$ . وعليه فمن الواضح ان :

$$P(A)=\frac{3}{4};\ \ P(B)=\frac{1}{4}$$

ونرمز الى الحادثة المركبة ( الاختياران الاولان يعطيانا تيلتين طول كل منهما اقل من ٤٥ مم ، ويعطينا الاختيار الثالث تيلة اطول من ٤٥ مم ) بـ $AAB$ .

وواضح الآن ما تعنيه الرموز $BBA$ ، $ABA$ وهكذا . والمسألة المطروحة الآن ، هى ايجاد احتمال وقوع الحادثة $C$ الدالة على انه من بين ثلاث تيلات ، تكون اثنتان اقصر من ٤٥ مم وواحدة اطول من ٤٥ مم ، ولكى يحدث هذا يجب بالطبع ان تتحقق احدى الحوادث التالية ،

$$AAB,\ ABA,\ BAA \qquad (1)$$



وبما ان كل اثنتين من هذه الحوادث ، منافيتان لبعضهما فانه حسب قاعدة جمع الاحتمالات

$$P(C)=P(AAB)+P(ABA)+P(BAA).$$

ان الحدود الثلاثة الموجودة فى الطرف الايمن متساوية ، حيث اننا نستطيع ان نعتبر نتائج اختيار التيلات ، حوادث مستقلة عن بعضها . فمن قاعدة ضرب الاحتمالات للحوادث المستقلة ، يتضح ان احتمال حدوث اى من الحوادث (1) ، ما هو الا حاصل ضرب ثلاثة حدود. اثنان منها يساويان $P(A)=\frac{3}{4}$ والآخر $P(B)=\frac{1}{4}$. وعلى ذلك ، فان احتمال تحقق اى من الحوادث (1) يساوى

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64},$$

وبالتالى ، فان

$$P(C)=3\cdot\frac{9}{64}=\frac{27}{64},$$

وهو المطلوب ايجاده كحل للمسألة المعطاة .

مثال ٢ . كانت نتيجة المراقبات المستمرة لعشرات السنين انه من بين كل الف مولود يوجد فى المتوسط ٥١٥ ذكرا و ٤٨٥ انثى . فاذا كان فى عائلة ما ستة اطفال . اوجد احتمال ان يكون بينهم انثيان على الاكثر .

تقع الحادثة التى نحسب احتمالها فى الحالات التالية : الا يكون هناك اناث او تكون انثى واحدة ، او انثيان . نرمز الى احتمالات وقوع هذه الحالات بـ $(P_0, P_1, P_2)$ ويتضح من قاعدة الجمع ان الاحتمال المطلوب هو :

$$P=P_0+P_1+P_2 \qquad (2)$$

وبالنسبة لكل طفل ، فان احتمال ان يكون ذكرا ، هو ٠,٥١٥ ، واحتمال ان يكون انثى هو ٠,٤٨٥ .

ان اسهل شيء هنا هو ايجاد $P_0$ . وهو احتمال ان يكون جميع اطفال العائلة ذكورا . حيث ان حادثة ــ ولادة طفل من احد الجنسين ــ يمكن اعتبارها مستقلة عن ولادة الاطفال الآخرين ، ومن قاعدة الضرب فان احتمال كون الاطفال الستة ذكورا ، يساوى حاصل ضرب المقدار ٠,٥١٥ فى نفسه ست مرات ، اى ان :

$$P_0 = (0{,}515)^6 \approx 0{,}018$$

ونحسب الآن الاحتمال $P_1$ ، اى احتمال ان تحتوى مجموعة الاطفال الستة على انثى واحدة وخمسة ذكور .

يمكن ان تقع هذه الحادثة بست طرق مختلفة ، وذلك بالنظر الى ترتيب ولادة الانثى بين الاطفال ( الاول ، الثانى ، وهكذا ) ندرس حالة ما من حالات هذه الحادثة . وعلى سبيل المثال عندما تكون الانثى هى الرابعة فى ترتيب الولادة . يتضح من قاعدة الضرب ، ان احتمال وقوع هذه الحالة هو حاصل ضرب ستة حدود ، كل من خمسة من هذه الحدود يساوى ٠,٥١٥ والسادس ( الواقع فى المكان الرابع ) يساوى ٠,٤٨٥ ، اى ان هذا الاحتمال يساوى ( ٠,٥١٥ )^٥ × ٠,٤٨٥ وهو نفس احتمال وقوع اية حالة من الحالات الخمس الممكنة الاخرى لحادثتنا هذه . ولذا وحسب قاعدة الجمع يكون احتمال وقوع هذه الحادثة مساويا لحاصل جمع ستة اعداد كل منها يساوى ( ٠,٥١٥ )^٥ × ٠,٤٨٥ ، اى ان :

$$P_1 = 6 \cdot (0{,}515)^5 \cdot 0{,}485 \approx 0{,}105.$$

لنعد الآن لحساب $P_2$ ( احتمال ان يكون هناك انثيان واربعة ذكور ) . اننا نلاحظ كما سبق ، ان هذه الحادثة تأخذ حالات



مختلفة فى وقوعها ( احدى هذه الحالات مثلا كالتالى : الطفلان الثانى والخامس بترتيب الولادة ، هما انثيان والباقى ذكور ) .

وحسب قاعدة الضرب يكون احتمال وقوع اى من هذه الحالات مساويا ( ٠,٥١٥ )^٤ × ( ٠,٤٨٥ )^٢ وعلى ذلك وحسب قاعدة الجمع فان $P_2$ يساوى ( ٠,٥١٥ )^٤ × ( ٠,٤٨٥ )^٢ مضروبا فى عدد تلك الحالات الممكنة لهذه الحادثة . وبذلك تؤول المسألة الى ايجاد هذا العدد .

وتتلخص كل حالة من هذه الحالات فى انه من بين الستة اطفال توجد انثيان والباقى ذكور . وعلى ذلك ، فان عدد هذه الحالات المختلفة يساوى عدد طرق اختيار طفلين من الاطفال الستة الموجودين . وعدد هذه الطرق يساوى عدد توافيق اثنين من ستة . اى ان

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

وعلى ذلك ، فان

$$P_2 = \binom{6}{2} \cdot (0{,}515)^4 \cdot (0{,}485)^2 = 15 \cdot (0{,}515)^4 \cdot (0{,}485)^2 \approx 0{,}217.$$

وبجمع هذه الاحتمالات التى حصلنا عليها نجد ان :

$$P = P_0 + P_1 + P_2 \approx 0{,}018 + 0{,}105 + 0{,}247 = 0{,}370.$$

اى انه فى مثل هذه العائلات العديدة الاطفال ، توجد فى كل عشر حالات بالتقريب ، اربع حالات (باحتمال $P \approx 0{,}37$ ) لا يكون فيها عدد الاناث اكثر من الثلث ، وهذا يعنى ان عدد الذكور لا يكون اقل من الثلثين .

## ١٤ – معادلات برنولى

تعرفنا فى البند السابق على بعض الامثلة حول توزيع الاختبارات المتكررة . ويمكن فى كل محاولة منها ان تقع حادثة معينة $A$ . وكلمة «اختبار» هنا اعطيناها معنى عاما ومفهوما واسعا ، فاذا كنا نقوم باطلاق رصاصات على هدف معين مثلا ، فان كل رمية هنا تعتبر اختبارا . واذا كنا نجرى تجربة على طول عمر المصباح الكهربائى ، فان مفهوم «اختبار» هو تجربة كل مصباح . اما اذا كنا ندرس، مجموعة من الاطفال الحديثى الولادة من ناحية الجنس او الوزن او الطول ، فان مفهوم الاختبار هنا هو عملية فحص كل طفل على حدة. وفيما بعد سنعرف الاختبار بصورة عامة على انه تحقيق ظروف معينة يمكن عند وجودها ان تقع الحادثة التى تهمنا .

نحن هنا امام دراسة توزيع من اهم توزيعات نظرية الاحتمالات . وعلاوة على ان للتوزيع تطبيقات فى مختلف نواحى المعرفة ، غير ان له اهمية كبيرة كذلك فى نفس نظرية الاحتمالات ، كأحد فروع علم الرياضيات . يتلخص هذا التوزيع فى دراسة تتابع اختبارات مستقلة عن بعض ، اى تلك الاختبارات التى لا يعتمد احتمال الحصول على نتيجة ما فى اى منها ، على نتائج الاختبارات الاخرى السابقة او التى تجرى بعدها. وفى كل من هذه الاختبارات يمكن ان تقع ( او لا تقع ) حادثة معينة $A$ باحتمال $p$ ولا يعتمد هذا الاحتمال على رقم الاختبار . ويسمى هذا التوزيع بتوزيع برنولى . وقد بدأ العالم السويسرى ياكوف برنولى (الذى عاش فى اواخر القرن السابع عشر) بدراسة هذا التوزيع .



لقد قابلنا توزيع برنولى فى بعض الامثلة السابقة . وللتأكد من ذلك ، يكفى ان نتذكر امثلة البند السابق . والآن سنحل المسألة العامة التالية التى تعتبر جميع الامثلة الواردة فى هذا الباب حتى الان ، حالات خاصة منها .

مسألة . تحت ظروف معينة ، يكون احتمال وقوع حادثة معينة $\overline{A}$ فى اى اختبار ، مساويا لـ $p$ . اوجد احتمال انه اذا اجرينا مجموعة من $n$ من الاختبارات المستقلة ، فان هذه الحادثة $A$ تقع $k$ مرة ولا تقع $n-k$ مرة .

تظهر الحادثة التى نريد ايجاد احتمال وقوعها وعدم وقوعها فى حالات مختلفة . ولكى نحصل على حالة معينة من تلك الحالات ، يجب ان نختار بشكل عفوى ، $k$ اختبارا من مجموعة الاختبارات $n$ . ونفرض انه بالذات فى هذا الـ $k$ اختبارا ، وقعت الحادثة $A$ ولم تقع فى الاختبارات الـ $n-k$ الاخرى وعلى ذلك ، فان كل اختبار من هذه الاختبارات يستوجب حدوث نتائج معينة عددها $n$ وهى ظهور الحادثة $A$ فى $k$ منها وعدم ظهورها فى $n-k$ وبذلك نحصل من قاعدة الضرب على احتمال حدوث كل حالة وهو يساوى :

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

وعدد هذه الحالات الممكنة يساوى عدد المجموعات المختلفة والمكونة من $k$ من الاختبارات التى نختارها من العدد الكلى للاختبارات وهو $n$ ، اى يساوى $\binom{n}{k}$ .

وباستعمال قاعدة الجمع والعلاقة المعروفة للتوافيق

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}$$

نجد ان الاحتمال المطلوب ، اى احتمال ظهور الحادثة $A$ ، بمقدار $K$ مرة عند اجراء $n$ من الاختبارات المستقلة ، يساوى

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1} p^k(1-p)^{n-k} \qquad (3)$$

وهذا هو حل المسألة المطروحة .

وكثيرا ما يحدث ان يكون من الانسب كتابة العبارة $\binom{n}{k}$ فى صورة اخرى ، وذلك بضرب البسط والمقام فى $(n-k)(n-(k+1))\ldots 2\cdot 1$. عندئذ نحصل على:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1\cdot(n-k)(n-(k+1))\ldots 2\cdot 1}$$

او للاختصار نستعمل الرمز $m!$ ، ويعنى مضروب جميع الاعداد الصحيحة من 1 الى $m$ ، بما فى ذلك $m$ نفسها ، اى ان :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

وهذا يعطى لـ $P_n(K)$ ، المعادلة الآتية :

$$P_n(K) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k} \qquad (4)$$

وتسمى المعادلتان (3) و (4) بمعادلتى برنولى . عندما تكون قيمتا $k$ و $n$ كبيرتين ، فان حساب $P_n(k)$ باستخدام هاتين المعادلتين متعب جدا . لان المضروبات $n!, k!, (n-k)!$ اعداد كبيرة ، وحسابها متعب جدا كذلك . ولذلك تستعمل الجداول الخاصة بقيمة المضروبات لحساب مثل هذه الكميات ، او تستعمل بعض العلاقات التقريبية .

مثال . احتمال ان يكون استهلاك مؤسسة ما للمياه عاديا (ليس اكثر من عدد معين من اللترات كل يوم) يساوى $\frac{٣}{٤}$ .



اوجد احتمالات انه فى مدى ستة ايام متتالية ، يكون استهلاك الماء عاديا لمدة يوم واحد ، يومين ، ثلاثة ايام . . . ، ستة ايام .

نرمز الى احتمال انه خلال $k$ يوم من الايام الستة ، يكون استهلاك الماء عاديا بـ $P_6(k)$ . وباستعمال العلاقة (3) (حيث يجب وضع $p=\frac{3}{4}$) نجد ان :

$$P_6(6) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6}$$

$$P_6(5) = 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\frac{1}{4} = \frac{6\cdot 3^5}{4^6}$$

$$P_6(4) = \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \binom{6}{2}\frac{3^4}{4^6} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{3^4}{4^6} = \frac{15\cdot 3^4}{4^6}$$

$$P_6(3) = \binom{6}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3^3}{4^6} = \frac{20\cdot 3^3}{4^6}$$

$$P_6(2) = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{15\cdot 3^2}{4^6}$$

$$P_6(1) = 6\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{6\cdot 3}{4^6}$$

واخيرا فمن الواضح ان $P_6(0)$ (احتمال ان يكون الاستهلاك فوق المعدل فى كل يوم من الايام الستة) يساوى $\frac{1}{٦٤}$ . وتكون جميع هذه الاحتمالات السبعة على صورة كسور ، مقاماتها جميعا متساوية ، وتساوى ٤٦=٤٠٩٦ . وقد تعمدنا هذا بالطبع ، لاختصار الحسابات . وباجراء الاختصارات اللازمة نحصل على

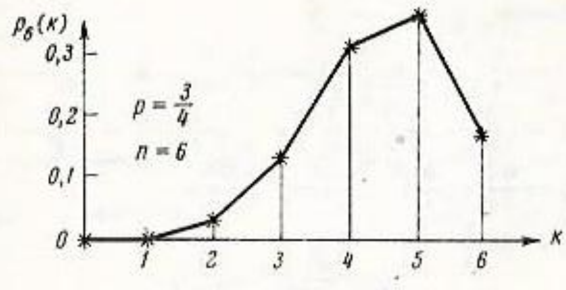
$$P_6(6) \approx 0{,}18;\ P_6(5) \approx 0{,}36;\ P_6(4) \approx 0{,}30;$$
$$P_6(3) \approx 0{,}13;\ P_6(2) \approx 0{,}03;\ P_6(1) \approx P_6(0) \approx 0\,.$$

من هنا نرى ان وصول استهلاك الماء الى ما فوق المعدل فى يوم او يومين من الستة ايام ، هو الاكثر احتمالا .

وان احتمال ان يصل الاستهلاك الى ما فوق المعدل طيلة خمسة او ستة ايام $[P_6(1) + P_6(0)]$ عمليا ، يساوى صفرا .

## ١٥ ـ اكبر عدد المرات احتمالا لوقوع الحادثة

يوضح المثال الاخير الذى درسناه ، ان احتمال الاستهلاك العادى للمياه على مدى $k$ من الايام بالضبط ، يزداد اولا بزيادة $k$ ويصل الى اكبر قيمة له ، ثم يبدأ فى التناقص . وهذا يظهر اكثر وضوحا اذا ما مثلنا التغيير الذى يحدث للاحتمال $P_6(k)$ تبعا لزيادة $k$ هندسيا ، بالرسم البيانى الموضح فى الشكل ٤ .




شكل ٤

وعندما تزداد $n$ ، فان الرسم البيانى يعطينا صورة اكثر وضوحا للتغيير الذى يحدث للمقدار $P_n(k)$ تبعا لزيادة $k$ ، وبوجه خاص ، عندما يصبح العدد $n$ اكبر. فعندما تكون $n=15$ و $p=\frac{1}{2}$ يكون الرسم البيانى ، كما هو موضح فى الشكل ٥ .

ويطلب فى المسائل العملية احيانا ايجاد عدد المرات الاكبر احتمالا لوقوع حادثة معينة . اى انه عند اى عدد $k$ يكون الاحتمال $P_n(k)$ اكبر ما يمكن ( يفترض فى هذه الحالة ان المقدار $p$ وكذلك المقدار $n$ معلومان ) .

وتسمح علاقات برنولى فى جميع الحالات بايجاد حل بسيط لهذه المسألة . وسنبدأ الآن بدراسة ذلك .



نحسب اولا قيمة الكسر : $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ .

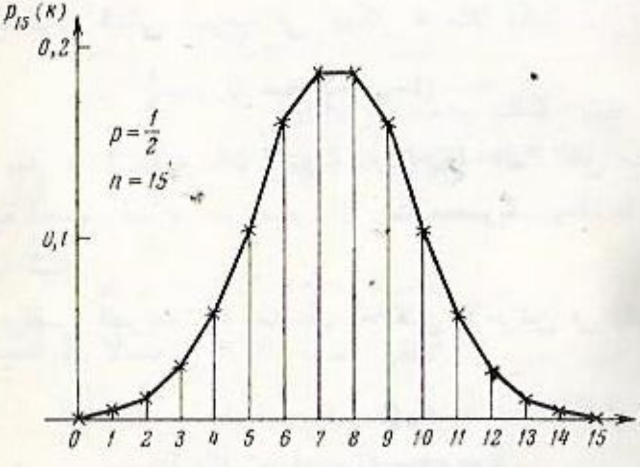
نعلم من العلاقة (4) ان

$$P_n(k+1)=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\,p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \qquad (5)$$

ومن العلاقتين (3) و (5) نحصل على :

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\frac{n!\,k!\,(n-k)!\,p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,n!\,p^k(1-p)^{n-k}}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}$$

يكون الاحتمال $P_n(k+1)$ اكبر من الاحتمال $P_n(k)$ او يساويه او اصغر منه تبعا لما اذا كانت النسبة $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ اكبر من الواحد الصحيح او تساويه او اصغر منه .




شكل ٥

وكما نرى ، فهذا بدوره يتضح من الاجابة على السؤال الآتى : اية من العلاقات التالية صحيحة :

$$\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}>1;\quad \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}=1;\quad \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}<1 \qquad (6)$$

اذا ما اردنا مثلا ان نحدد قيمة $k$ التى تتحقق عندها العلاقة $P_n(k+1)>P_n(k)$ فانه يجب لدلك ان نحدد قيم $k$ التى تتحقق عندها المتباينة :

$$(n-k)p>(k+1)(1-p) \text{ او } \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}>1$$

ومنها نحصل على :

$$np-(1-p)>k$$

وعليه فمهما ازدادت قيمة $k$ ، فانها لا تصل الى $np-(1-p)$ وستكون المتباينة $P_n(k+1)>P_n(k)$ دائما صحيحة ، اى انه كلما ازداد العدد $k$ ، كلما ازداد الاحتمال $P_n(k)$ ففى التوزيع الذى يناظره الرسم البيانى الموجود فى الشكل ٥ مثلا يكون :

$$np-(1-p)=7,\ n=15,\ p=\frac{1}{2}$$

اذن بما ان $k<7$ ، فان المتباينة $P_n(k+1)>P_n(k)$ تظل صحيحة بالنسبة لجميع قيم $k$، من صفر الى ستة محسوبة . وهذا ما يؤكده الرسم البيانى .

وبنفس الطريقة ، وباستعمال العلاقتين الاخرتين فى (6) نجد ان :

$$P_n(k+1)=P_n(k)$$
اذا كانت $k=np-(1-p)$ ،
$$P_n(k+1)<P_n(k)$$
اذا كانت $k>np-(1-p)$

اى انه اذا ازدادت $k$ حتى تجاوزت الحد $np-(1-p)$ فان $P_n(k)$ يبدأ فى التناقص ، ويظل يتناقص حتى يصل الى $P_n(n)$ .



وتؤكد لنا هذه النتيجة قبل كل شئ ، ان خاصية المقدار $P_n(k)$ [يتزايد اولا ثم يتناقص بعد ذلك تبعا لزيادة $k$] التى لاحظناها فى الامثلة السابقة ، ما هى الا قانون عام ينطبق على جميع الحالات . اضف الى ذلك ، ان هذه النتيجة تسمح مباشرة ، بحل المسألة التى وضعناها سابقا ، وهى تعيين القيمة الاكثر احتمالا للعدد $k$ .

نرمز الى القيمة الاكثر احتمالا بـ $k_0$ ، فيكون

$$P_n(k_0+1)\leqslant P_n(k_0)$$

ومما سبق يتضح ان

$$k_0\geqslant np-(1-p)$$

ومن ناحية اخرى ، فان

$$P_n(k_0-1)\leqslant P_n(k_0)$$

ومما سبق كذلك يجب ان يكون :

$$k_0-1\leqslant np-(1-p)$$

او :

$$k_0\leqslant np-(1-p)+1=np+p$$

وعلى ذلك يجب ان تحقق القيمة الاكثر احتمالا $k_0$ للعدد $k$ ، المتباينة الثنائية التالية :

$$np-(1-p)\leqslant k_0\leqslant np+p \qquad (7)$$

ان الفترة من $[np-(1-p)]$ الى $(np+p)$ لهذه المتباينة والتى يجب ان يقع داخلها العدد $k_0$ تساوى واحدا صحيحا . وذلك باستعمال قاعدة الطرح . وهكذا فاذا لم يكن احد طرفى هذه الفترة $np-(1-p)$ مثلا ، عددا صحيحا ، لوجب ان يقع بين هذين

لطرفين (اى فى داخل الفترة) عدد صحيح واحد فقط ، حيث تأخذ $k_0$ قيمة واحدة . وهذه الحالة ، هى الحالة التى يجب ان تعتبر عادية . وبما ان $p<1$ فنادرا ما يكون المقدار $np-(1-p)$ عددا صحيحا . وفى هذه الحالة النادرة تعطينا المتباينة (7) القيمتين $np-(1-p)$ و $np+p$ للعدد $k_0$ . ويكون الفرق بين هاتين القيمتين واحدا صحيحا وهاتان القيمتان هما الاكثر احتمالا ويكون احتمالاهما متساويين ، واكبر من اى احتمال لاية قيمة اخرى للعدد $k$ .
ن هذه الحالة النادرة بالذات موضحة بالرسم البيانى فى الشكل ٥ حيث ان $n=15$ ، $p=\frac{1}{2}$ ، اى ان

$$np+p=8,\ np-(1-p)=7$$

ويكون العددان ٧ ، ٨ اكثر الاعداد التى تأخذها $k$ احتمالا (اى عدد مرات وقوع الحادثة) واحتمالاهما متساويان ، ويساوى كل منهما بالتقريب ٠,١٩٦ (وهذا ما يتضح من الرسم البيانى) .

مثال ١ . اتضح نتيجة للملاحظات المستمرة خلال سنوات فى منطقة ما ، ان احتمال سقوط المطر فى يوم اول يوليو هو $\frac{٤}{١٧}$ . اوجد القيمة الاكثر احتمالا لعدد ايام اول يوليو الممطرة خلال الخمسين سنة القادمة . بما ان $p=\frac{4}{17},\ n=50$ اذن

$$np-(1-p)=50\cdot\frac{4}{17}-\frac{13}{17}=11$$

وهو عدد صحيح . اى اننا امام حالة نادرة . فالعددان ١١ و ١٢ لهما نفس الاحتمال . وهما اكثر اعداد الايام الممطرة احتمالا .



مثال ٢ . فى احدى تجارب الفيزياء وضعت جسيمات معينة تحت الملاحظة ، وفى ظروف واحدة ظهر ٦٠ جسيما فى المتوسط ، فى فترة زمنية ذات طول معين ، وكان احتمال ان تزيد سرعة كل منها عن $v_0$ مساويا لـ ٠,٧ وفى نفس الفترة الزمنية ، ولكن تحت ظروف مختلفة ، ظهر ٥٠ جسيما . واحتمال ان تزيد سرعة كل منها عن $v_0$ يساوى ٠,٨ . تحت اى من الظروف يكون العدد الاكثر احتمالا للجسيمات التى تزيد سرعتها عن $v_0$ هو الاكبر ؟

فى الظروف الاولى للتجربة : $n=60;\ p=0{,}7;$

$np-(1-p)=41{,}7;\ k_0=42.$

فى الظروف الثانية للتجربة : $n=50;\ p=0{,}8;$

$np-(1-p)=39{,}8;\ k_0=40.$

ومن هنا ، نرى ان العدد الاكثر احتمالا للجسيمات «الاسرع» ، تحت ظروف التجربة الاولى اكبر قليلا مما هو عليه تحت الظروف الثانية .

وكثيرا ما يحدث عمليا ، ان يكون العدد $n$ كبيرا جدا (الرماية بالجملة ، انتاج السلع بالجملة وهكذا). فى هذه الحالة ، يكون المقدار $np$ كبيرا جدا ايضا (اذا لم يكن الاحتمال $p$ صغيرا للغاية) وبما ان الحد الثانى (اى $1-p$ و $p$) فى كل من العددين، اى $(np+p$ و $np-(1-p))$ اللذين يقع بينهما العدد الاكثر احتمالا ، اقل من الواحد الصحيح ، فانه يمكن اعتبار هذين العددين ، وكذلك العدد الاكثر احتمالا لوقوع الحادثة (اى العدد الواقع بينهما) ، قريبين من $np$ . واذا كان احتمال الاتصال التليفونى

فى مدى اقل من ١٥ ثانية مثلا يساوى ٠,٧٤ ، فيمكن اعتبار انه من كل ١٠٠٠ مكالمة تليفونية ، يكون ١٠٠٠×٠,٧٤ هو العدد الاكثر احتمالا للمكالمات التى تتم فى مدى اقل من ١٥ ثانية .

ويمكن صياغة هذه النتيجة بطريقة اخرى بحيث تكون اكثر دقة . اذا فرضنا ان $k_0$ هو العدد الاكثر احتمالا لوقوع حادثة معينة عند اجراء $n$ من الاختبارات ، فان $\frac{k_0}{n}$ هى النسبة الاكثر احتمالا لوقوع هذه الحادثة عند اجراء هذه الـ $n$ من الاختبارات . وهكذا ، فان المتباينة (7) تعطينا :

$$p-\frac{1-p}{n}\leqslant\frac{k_0}{n}\leqslant p+\frac{p}{n}$$

والآن نتصور اننا ثبتنا احتمال وقوع الحادثة فى كل اختبار وفرضناه انه يساوى $p$ وزدنا عدد الاختبارات $n$ اكثر واكثر (فى هذه الحالة من الطبيعى ان تزداد قيمة العدد الاكثر احتمالا لوقوع الحادثة $k_0$) . وبذلك يتناقص الكسران $\frac{p}{n}$ ، $\frac{1-p}{n}$ الموجودان فى الطرفين الايمن والايسر من المتباينة الاخيرة بالتدريج . وبذلك يمكن اهمال هذين الكسرين اذا كانت $n$ كبيرة . اى انه يمكن اعتبار ان الطرفين الايسر والايمن للمتباينة متساويان ، ويساويان $p$ ، وفى نفس الوقت يساويان الكسر $\frac{k_0}{n}$ .

**وعلى ذلك فمن الناحية العملية ، عندما يكون عدد الاختبارات كبيرا ، تتساوى النسبة الاكثر احتمالا لوقوع الحادثة مع احتمال وقوع هذه الحادثة فى كل اختبار .**

وهكذا ، فاذا حدث انه اثناء اجراء بعض القياسات كان احتمال ان يقع الخطأ فى كل قياس بين القيمتين α ، β يساوى



٠,٨٤ ، فان الاحتمال الاكبر هو ان يقع الخطأ فى حوالى ٨٤ ٪ من كافة الحالات بين القيمتين α ، β . وهذا لا يعنى بالطبع ان احتمال وقوع ٨٤ ٪ من هذه الاخطاء كبير . وبالعكس ، فهذا « الاحتمال الاكبر » فى حد ذاته يكون صغيرا جدا ، عندما يكون عدد القياسات كبيرا جدا . (وقد رأينا من الرسم البيانى فى الشكل ٥ ، ان أكبر احتمال يساوى ٠,١٩٦ مع العلم بان عدد الاختبارات هناك لم يزد على ١٥ اختبارا . وعندما يكون عدد الاختبارات كبيرا ، يكون الاحتمال اصغر من ذلك بكثير) . ويعتبر هذا الاحتمال اكبر ما يمكن بمعنى نسبى : اى ان احتمال الحصول على ٨٤ ٪ من القياسات باخطاء تقع بين القيمتين α و β اكبر من احتمال الحصول على ٨٣ ٪ او ٨٦ ٪ من القياسات بنفس هذه الاخطاء .

ومن ناحية اخرى ليس من الصعب ان نفهم انه عند اخذ مجموعات كبيرة من القياسات ، تقل اهمية احتمال وقوع هذا العدد او ذلك من الاخطاء فى المقدار الذى يقاس . فعلى سبيل المثال ، اذا اخذنا ٢٠٠ قراءة (اثناء قياس مقدار ما) فانه ليس من المهم ان نحسب احتمال وجود ١٣٧ قراءة منها ، ذات دقة معينة . حيث انه عمليا على حد سواء أكان هذا العدد ١٣٧ ام كان ١٣٦ أو ١٣٨ أو حتى ١٤٠ . وبالعكس ، فاذا كان السؤال على سبيل المثال يدور حول ايجاد احتمال ان يكون عدد القياسات التى يقع فيها خطأ بين قيمتين معينتين هو اكبر من ١٠٠ من بين القياسات الـ ٢٠٠ التى اجريت ، او يقع هذا العدد بين ١٠٠ و ١٢٥ ، او يكون اصغر من ٥٠ ، وهكذا ، فلا شك ان لهذا السؤال اهمية عملية . فكيف يمكن ايجاد مثل هذا الاحتمال ؟

نفرض ، على سبيل المثال ، ان المطلوب هو ايجاد احتمال ان يقع مثل هذا العدد من القياسات بين ١٠٠ و ١٢٠ ( ١٢٠ محسوبة ايضا ) او بمعنى اصح ، المطلوب هو حساب احتمال تحقق المتباينة ، حيث ان $k$ ـ عدد النجاحات .

$$100 < k \leqslant 120$$

ولكى تتحقق هذه المتباينة يجب ان تساوى $k$ احد الاعداد العشرين من ١٠١ ، ١٠٢ ، ... ، ١٢٠ ، وباستخدام قاعدة الجمع فان هذا الاحتمال يساوى

$$P(100 < k \leqslant 120) = P_{200}(101) + P_{200}(102) + \ldots + P_{200}(120);$$

ولايجاد هذا الاحتمال مباشرة يجب حساب عشرين احتمالا ، كل منها على صورة $P_n(k)$ وذلك باستعمال العلاقة (3) . وهذا يعرضنا الى مصاعب كبيرة فى الحساب ، خاصة اذا كان عدد هذه الاحتمالات كبيرا جدا . ولذا ، فانه لا يحدث عمليا ، ان يجرى حساب مجموع الاحتمالات السابق الذكر مباشرة ولهذا توجد علاقات تقريبية وجداول محسوبة مقدما ويعتمد وضع هذه الجداول والعلاقات على طرق خاصة فى التحليل الرياضى الذى سوف لا نتعرض اليه هنا ومع هذا فيمكن بسهولة الحصول على معلومات تؤدى فى حالات كثيرة الى ايجاد حل كامل للمسائل المطروحة ومن ضمنها الاحتمال من نوع $P(100 < k \leqslant 120)$ وهذا هو موضوع الباب التالى .

الباب السادس

# نظرية برنولى

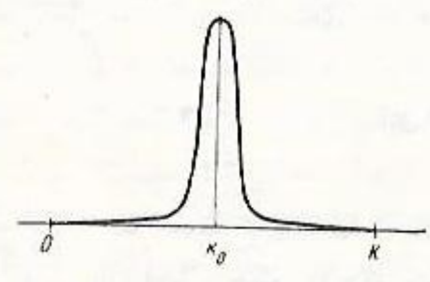
## ١٦ ـ محتوى نظرية برنولى

لنمعن ثانية فى الرسم البيانى فى الشكل ٥ ( صفحة ٧١ ) ، حيث تبيّن الخطوط الرأسية على الرسم البيانى ، الاعداد $P_{16}(k)$ وهى احتمالات جميع القيم التى يأخذها المقدار $k$ الذى يرمز الى عدد مرات وقوع الحادثة التى ندرسها . ان الاحتمال الذى يقابل جزءا معينا من المنحنى المحدد بالمقدار $k$ ، اى احتمال ان يكون عدد مرات وقوع الحادثة التى ندرسها مساويا لاى من الاعداد الواقعة داخل هذا الجزء ، يساوى وفقا لقاعدة الجمع : مجموع احتمالات وقوع الحادثة بعدد من المرات يساوى جميع الاعداد الواقعة داخل هذا الجزء ، اى يساوى مجموع اطوال المستقيمات الرأسية المرسومة داخل هذا الجزء . ويبين الرسم البيانى بوضوح ، ان هذا المجموع يختلف باختلاف الجزء الذى ندرسه ، مع فرض ان اطوال جميع الاجزاء متساوية . فاطوال المستقيمات المرسومة فى الجزء $2 \leqslant k < 5$ والجزء $7 \leqslant k < 10$ مثلا متساوية ، واحتمال كل جزء يساوى مجموع اطوال ثلاثة مستقيمات رأسية : ونلاحظ كذلك ان حاصل الجمع المقابل للجزء الثانى ، اكبر بكثير من حاصل الجمع المقابل للجزء الاول . ونعلم ان الرسم البيانى للاحتمال $P_n(k)$ لجميع قيم $n$ يشابه بصفة عامة ،

الرسم البيانى فى الشكل ٥ ، اى ان المقدار $P_n(k)$ يتزايد اولا تبعا لزيادة $k$ ثم يبدأ فى التناقص ، وذلك بعد ان يمر باكبر قيمة له . ولذلك ، فانه اذا اخذنا جزءين مختلفين مقابلين لقيم العدد $k$ بحيث يكونان متساويين فى الطول ، فان الاحتمال الاكبر يكون فى جميع الحالات هو لذلك الجزء الاكثر قربا من القيمة الاكبر احتمالا $k_0$ . وعلى وجه الخصوص تكون فى الجزء الذى يقع فى منتصفه العدد $k_0$ الاكبر احتمالا ، احتمالات اكبر من الاحتمالات الواقعة فى اى جزء آخر له نفس الطول .

ولكنه اتضح انه يمكن الوصول الى نتيجة ابعد مما حصلنا عليها . اذا كانت $k$ هى عدد مرات وقوع حادثة ما عند اجراء $n$ من الاختبارات، فان $k$ تأخذ $n+1$ من القيم المختلفة $0 \leqslant k \leqslant n$.

لنأخذ الجزء الذى تقع $k_0$ فى منتصفه — على ان يحتوى هذا الجزء على عدد صغير من قيم $k$ وليكن ٠,٠١ .




شكل ٦

ويتضح عندئذ ، انه فى حالة ما اذا كان عدد الاختبارات كبيراً جدا ، فان الاحتمال الاكبر لعدد مرات وقوع الحادثة يقع فى هذا الجزء ، اما احتمال القيم الباقية التى يأخذها العدد $k$ مجتمعة ، فصغير جدا للدرجة يمكن معها اهماله . وعلى ذلك



فاننا ولو اننا اخترنا جزءا صغيرا جدا بالمقارنة مع $n$ (يحتل هذا الجزء ٠,٠١ فقط من الطول المرسوم عليه الرسم البيانى ) الا ان مجموع المستقيمات الرأسية المرسومة على هذا الجزء اكبر كثيرا من مجموع باقى المستقيمات الرأسية الاخرى . والسبب هو ان طول المستقيمات الرأسية فى الجزء المتوسط من المنحنى ، اكبر بكثير من تلك المستقيمات المرسومة على طرفى المنحنى . وبناء على ذلك ، اذا كانت $n$ كبيرة ، فان منحنى الدالة $P_n(k)$ يأخذ الصورة المبينة فى الشكل ٦ .

**ومن الواضح ان كل ما تقدم ، يعنى من الناحية العملية اننا اذا اجرينا مجموعة مكونة من عدد كبير $n$ من الاختبارات ، يمكننا ان نتوقع ، باحتمال قريب من الواحد ، وقوع الحادثة $A$ عددا من المرات بحيث تكون $k$ قريبة جدا من القيمة الاكبر احتمالا ، ويختلف هذا العدد عن القيمة الاكبر احتمالا بمقدار صغير جدا بالنسبة لعدد الاختبارات $n$ التى نجريها .**

لقد اكتشفت هذه النظرية ، التى تسمى بنظرية برنولى ، فى مطلع القرن الثامن عشر ، وهى تعتبر من اهم قوانين نظرية الاحتمالات . وقد كان اثبات هذه النظرية حتى منتصف القرن الماضى يتطلب عمليات رياضية معقدة ، حتى جاء عالم الرياضيات الروسى الكبير ب . تشيبيتشيف واوجد اثباتا سهلا ومختصرا جدا لها . وسنعرض هذا الاثبات فى البند التالى .

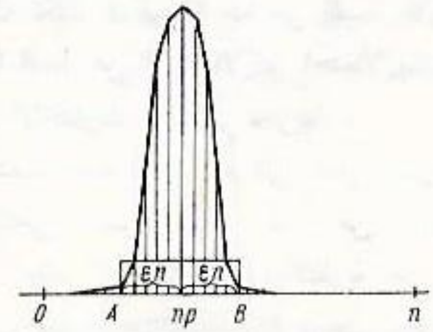
## ١٧ – اثبات نظرية برنولى

نعلم الان ان عدد الاختبارات $n$ اذا كان كبيرا ، فان العدد الاكثر احتمالا لوقوع الحادثة $A$ لا يختلف تقريبا عن المقدار

$np$ . حيث ان $p$ تعنى كما عرفناها دائما احتمال وقوع الحادثة $A$ فى كل اختبار منفرد . ولذا فانه يكفينا ان نثبت انه عندما يكون عدد الاختبارات كبيرا ، يصبح الاحتمال كبيرا جدا ، وان الفرق بين $k$ ــ عدد مرات وقوع الحادثة ، وبين والمقدار يكون صغيرا جدا اى ــ لا يزيد هذا الفرق على جزء صغير صغرا كافيا من عدد الاختبارات (لا يزيد على سبيل المثال عن $0{,}01\,n$ او $0{,}001\,n$ او بصورة عامة ليس اكبر من $\varepsilon n$ . حيث $\varepsilon$ ــ عدد صغير صغرا كافيا . او بمعنى آخر ، يجب ان نثبت ان الاحتمال

$$P(|k-np|>\varepsilon n) \qquad (1)$$

صغير جدا عندما يكون العدد $n$ كبيرا كبرا كافيا .



شكل ٧

ولنتأكد من ذلك ، نلاحظ انه باستعمال قاعدة جمع الاحتمالات ، يكون الاحتمال (1) مساويا لمجموع احتمالات $P_n(k)$ جميع القيم التى يأخذها العدد $k$ والتى تقل عن المقدار $np$ بكمية اكبر من $\varepsilon n$ . ويتضح من الرسم البيانى الاعتيادى (شكل ٧) ، ان هذا المجموع يساوى مجموع اطوال جميع



المستقيمات الرأسية الواقعة خارج المستقيم $AB$ ، عن يمينه وعن يساره . وبما ان المجموع الكلى لجميع المستقيمات الرأسية فى الشكل (يعتبر مجموع احتمالات مجموعة متكاملة من الحوادث) يساوى واحدا صحيحا ، فان هذا يعنى ان الجزء الاكبر من هذا المجموع (تقريبا يساوى واحدا صحيحا) يقع داخل المستقيم $AB$ ، وان جزءا صغيرا جدا من هذا المجموع يمكن اهماله ، يقع خارج هذا المستقيم .

وعلى ذلك فان :

$$P(|k-np|>\varepsilon n)=\sum_{|k-np|>\varepsilon n} P_n(k) \qquad (2)$$

نعود الان الى طريقة الاثبات التى اتبعها تشيبيتشيف . بما ان فى كل حد من حدود المجموع السابق يكون

$$\left|\frac{k-np}{\varepsilon n}\right|>1$$

وهذا يعنى ان

$$\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2>1$$

واننا نستطيع ان نزيد من قيمة هذا المجموع اذا عوضنا عن كل حد $P_n(k)$ منه بالمقدار

$$\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2 P_n(k)$$

ولذلك فان

$$P(|k-np|>\varepsilon n)<\sum_{|k-np|>\varepsilon n}\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2 P_n(k)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{|k-np|>\varepsilon n}(k-np)^2 P_n(k)$$

ومن الواضح ان هذا المجموع يزداد اكثر ، اذا ما اضفنا الى حدوده الموجودة حدودا اخرى ، وذلك بجعل المقدار $k$ لا يأخذ فقط القيم من $np-\varepsilon n$ الى $np+\varepsilon n$ بل من جميع القيم الممكنة له . اى القيم من الصفر الى $n$ . وبالتالى ، فاننا نحصل على :

$$P(|k-np|>\varepsilon n)<\frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 P_n(k) \qquad (3)$$

ويختلف هذا المجموع عن سابقيه فى انه يمكن ايجاد قيمته النهائية بدقة . وتتلخص طريقة تشيبيتشيف فى اننا نستعيض عن المجموع الذى يصعب حسابه (2) بمجموع آخر (3) يمكن ايجاد قيمته النهائية بسهولة وبدقة اكثر .

ونحسب الان هذا المجموع مع العلم بانه مهما بدا هذا الحساب طويلا ، الا انه عملية تكنيكية بحتة ولا تستعصى على من درس الجبر . وقد استعملنا الان طريقة تشيبيشيف المفيدة فى ايجاد المطلوب وذلك لانها تتلخص فى الاستعاضة عن العلاقة (2) بالعلاقة (3) نجد اولا بالآتى :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}k^2 P_n(k)-2np\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)+$$
$$+n^2p^2\sum_{k=0}^{n}P_n(k) \qquad (4)$$

ان المجموع الثالث فى الطرف الايمن يساوى واحدا ، لانه عبارة عن مجموع احتمالات مجموعة متكاملة من الحوادث وبذلك لا يبقى علينا الا ايجاد قيمة المجموعين

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k),\quad \sum_{k=0}^{n}k^2P_n(k)$$



اما الحدان المناظران لقيمة $k=0$ فى المجموعين ، فيساويان صفرا . ولذلك فانه يمكننا الجمع ابتداء من $k=1$

١ ) لايجاد قيمة المجموعين نعوّض عن $P_n(k)$ حسب العلاقة (4) صفحة ٦٨ فى الباب الخامس ، فنجد ان :

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

وبما انه من الواضح ان $n!=n(n-1)!$ و $k!=k(k-1)!$ فاننا نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

او باعتبار ان $k-1=l$ فى مجموع الطرف الايسر وبملاحظة ان $l$ تتغير من صفر الى $n-1$ عندما تتغير $k$ من 1 الى $n$ ، نجد ان :

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!}p^l(1-p)^{n-1-l}=np\sum_{l=0}^{n-1}P_{n-1}(l)$$

ومن الواضح ان المجموع الاخير $\sum_{l=0}^{n-1}P_{n-1}(l)$ يساوى واحدا صحيحا ، لانه عبارة عن حاصل جمع احتمالات مجموعة كاملة من الحوادث ( جميع الاعداد $l$ الممكنة لوقوع الحادثة ، عندما نجرى $n-1$ من الاختبارات ) . وبذلك نكون قد حصلنا على معادلة مبسطة جدا للمجموع $\sum_{k=0}^{n}k\,P_n(k)$ وهى :

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=np \qquad (5)$$

٢ ) ولحساب المجموع الثانى ، نجد اولا المقدار $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) P_n(k)$ وبما ان الحد المناظر للقيمة $k=1$ يساوى صفرا ، فانه يمكن اجراء الجمع ابتداء من $k=2$ . وبملاحظة ان $k! = k(k-1)(k-2)!$ وان $n! = n(n-1)(n-2)!$ وباعتبار ان $k-2=m$ كما سبق ، نحصل اخيرا على :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)P_n(k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P_n(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{m!(n-2-m)!} p^m (1-p)^{n-2-m} =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} P_{n-2}(m) = n(n-1)p^2 \qquad (6)$$

وذلك لان المجموع الاخير يساوى واحدا ، وهو يعتبر مجموع احتمال وقوع مجموعة كاملة من الحوادث ـ جميع الاعداد الممكنة لوقوع الحادثة ، عندما نجرى $n-2$ من الاختبارات .

واخيرا تعطينا العلاقتان (5) و (6)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 P_n(k) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)P_n(k) + \sum_{k=1}^{n} kP_n(k) = n(n-1)p^2 + np =$$
$$= n^2p^2 + np(1-p) \qquad (7)$$

والان نكون قد حسبنا المجموعين اللازمين . فبالتعويض بالنتيجتين (5) ، (7) فى العلاقة (4) نحصل نهائيا على :

$$\sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 P_n(k) = n^2p^2 + np(1-p) - 2np \cdot np + n^2p^2 = np(1-p)$$



وبالتعويض فى المتباينة (3) عن الطرف الايمن بهذا المقدار البسيط جدا الذى حصلنا عليه ، نحصل على :

$$P(|k-np| > \varepsilon n) < \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \qquad (8)$$

وتعطينا هذه المتباينة الاثبات المطلوب .

وفى الواقع يمكن ان نأخذ المقدار $\varepsilon$ صغيرا صغرا كافيا . ولكننا اذا ما اخترناه ، فاننا لا نستطيع ان نغيّره ثانية . اما عدد الاختبارات $n$ فيمكن اخذه كبيرا كبرا كافيا ( وذلك وفقا لمنطق النظرية ) ولذلك ، فان الكسر $\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$ يمكن اعتباره صغيرا صغرا كافيا ، وذلك لانه كلما ازدادت $n$ يزداد مقام الكسر ، وبما ان بسطه لا يتغير ، فان قيمة الكسر تتناقص تبعا لزيادة $n$ .

لنفرض على سبيل المثال، ان $p = 0{,}75$ اى ان $1-p = 0{,}25$ و

$$p(1-p) = 0{,}1875 < 0{,}2$$

نختار $\varepsilon = 0{,}01$ وبذلك تعطينا المتباينة (8) :

$$P\left(\left|k - \frac{3}{4}n\right| > \frac{1}{100}n\right) < \frac{0{,}2}{0{,}0001n} = \frac{2000}{n}$$

واذا كانت $n = 200000$ مثلا ، فان :

$$P(|k-150000| > 2000) < 0{,}01$$

وهذا يعنى عمليا ، الآتى :

اثناء عملية انتاجية ما ، وبطريقة تكنيكية معينة ، اذا كانت ل ٧٥ ٪ من الانتاج فى المتوسط خواص معينة ( انتاج من الدرجة الاولى مثلا ) فانه باحتمال اكثر من ٠,٩٩ ( اى انه تقريبا مؤكد ) يكون هناك لما بين ١٤٨٠٠٠ و ١٥٢٠٠٠ قطعة ، مثل هذه الخواص وذلك اذا ما اخترنا ٢٠٠٠٠٠ قطعة ، ويجب ان نضيف الى ذلك ، الملاحظتين الآتيتين :

١ – تعطينا المتباينة (8) للاحتمال $P(|k-np|>\varepsilon n)$ تقديرا غير دقيق الى حد كبير . وذلك لان هذا الاحتمال يكون فى الواقع اصغر بكثير وخاصة اذا كانت $n$ كبيرة جدا . ولذا فاننا عمليا نستعمل تقديرات اخرى اكثر دقة ولو ان اثباتها اصعب .

٢ – يصبح تقدير المتباينة (8) اكثر دقة ، كلما كان الاحتمال $p$ صغيرا . وعلى العكس ، كلما اقترب من الواحد اكثر فاكثر .

ففى المثال السابق مثلا ، اذا كان احتمال ان تكون لكل قطعة انتاج خواص معينة ، هو $p=0{,}95$ ، فان

$$1-p=0{,}05,\ p(1-p)<0{,}05$$

ولذا ، فانه اذا اخترنا $\varepsilon=0{,}005$ ، $n=200000$ نجد أن :

$$\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}<\frac{0{,}05\cdot 1000000}{25\cdot 200000}=0{,}01$$

وتنطبق هذه النتيجة ، مع النتيجة السابقة ، ولكن $\varepsilon_n$ الآن تساوى ١٠٠٠ ، لا ٢٠٠٠ . ومن هنا ( حيث ان $np=190000$ ) نستنتج انه عمليا ، من المؤكد ان ينحصر عدد قطع الانتاج التى لها هذه الخواص ، عندما يكون العدد الكلى ٢٠٠٠٠٠ قطعة ، بين ١٨٩٠٠٠ و ١٩١٠٠٠ .

وعلى ذلك ، فعندما تكون $p=0{,}95$ فان المتباينة (8) تضمن عمليا ، ان يقع عدد قطع الانتاج التى لها الخواص المطلوبة داخل فترة اقل من تلك التى نحصل عليها عندما تكون $p=0{,}75$ ، وذلك لان

$$P(|k-190000|>1000)<0{,}01$$



مسألة . اذا علم بان ربع عدد عمال مؤسسة صناعية ما ، حاصلون على شهادة تعليم متوسط ، واذا اخترنا ٢٠٠٠٠٠ عامل من هؤلاء العمال بطريقة عشوائية . اوجد :

١ – العدد الاكثر احتمالا للعمال الحاصلين على شهادة تعليم متوسط من بين الـ ٢٠٠٠٠٠ المختارين .

٢ – احتمال ان يختلف العدد الحقيقى لمثل هؤلاء العمال عن العدد الاكثر احتمالا بمقدار لا يزيد عن ١,٦ ٪ .

عند حل هذه المسألة يجب ان نأخذ فى الاعتبار ان احتمال ان يكون كل عامل من العمال الـ ٢٠٠٠٠٠ ، المختارين عشوائيا ، حاصلا على شهادة تعليم متوسط يساوى $\frac{1}{4}$ (وهنا يكمن معنى كلمة عشوائى ) . وعلى ذلك ففى تمريننا هذا

$$n=200000,\ p=\frac{1}{4},\ k_0=np=50000,\ p(1-p)=\frac{3}{16}$$

يجب ايجاد احتمال ان $|k-np|<0{,}016\,np$ أو $|k-np|<800$ ، حيث $k$ عدد العمال الحاصلين على شهادة تعليم متوسط .

ونختار $\varepsilon$ بحيث ان يكون $\varepsilon n=800$ . ومن هنا نجد ان $\varepsilon=\frac{800}{n}=0{,}004$ ، تعطينا العلاقة (8) :

$$P(|k-50000|>800)<\frac{3}{16\cdot 0{,}000016\cdot 200000}\approx 0{,}06$$

ومنها نحصل على :

$$P(|k-50000|<800)>0{,}94$$

الاجابة : العدد الاكثر احتمالا المطلوب ، يساوى ٥٠٠٠٠ ، والاحتمال المطلوب اكبر من ٠,٩٤ .

وفى الواقع ، يكون الاحتمال المطلوب اقرب من تلك النتيجة الى الواحد بكثير .

# الكميات العشوائية

## الباب السابع

## الكميات العشوائية وقانون التوزيع

### ١٨ ـ مفهوم الكمية العشوائية

فى كل ما سبق ، كثيرا ما قابلتنا تلك الكميات التى تكون قيمتها العددية غير محددة تحديدا نهائيا ، وانما تتغير تحت تأثير عوامل عشوائية . فعدد المواليد الذكور من بين كل مئة مولود غير محدد ، وليس ثابتا بالنسبة لكل مئة مولود ، او طول تيلة القطن من نوع معين يتغير تغيرا ملحوظا ، ليس فقط بالنسبة لمناطق الزراعة المختلفة بل وبالنسبة لنفس عود القطن ولنفس اللوزة .

لنستعرض بعض الامثلة على مثل هذه الكميات :

١ ـ لو اننا نطلق الرصاص من نفس البندقية وعلى نفس الهدف ، وتحت نفس الشروط ، فمع ذلك نلاحظ ان الرصاص يتساقط فى اماكن مختلفة ، وتسمى هذه الظاهرة بـ « تشتت » الرصاص . ان البعد بين مكان سقوط الرصاصة ومكان اطلاقها ، ما هو الا كمية تأخذ قيما عددية مختلفة فى كل حالة ، بسبب عوامل عشوائية لم يكن بالامكان حسابها او التنبؤ بها مسبقا .

٢ ـ لا تبقى سرعة جزىء الغاز ثابتة ، بل تتغير بسبب تصادمه



بالجزيئات الاخرى . وبما ان كل جزئ يمكن ان يتصادم او ان لا يتصادم مع جزئ آخر من الغاز ، فان التغير فى سرعته يحمل طابعا عشوائيا صرفا .

٣ ـ ان عدد الاجسام الكونية التى تتساقط على سطح الكرة الارضية فى خلال عام ، غير ثابت ، ولكنه يتذبذب بشكل ملحوظ تبعا لمجموعة من العوامل ذات طابع عشوائى .

٤ ـ ان وزن حبوب القمح المزروعة فى مساحة معينة ، لا يساوى مقدارا ثابتا محددا . ولكن يتغير من حبة الى اخرى ، ولعدم استطاعتنا دراسة جميع العوامل (حالة الارض التى نمت فيها سنبلة القمح التى اخذت منها الحبة ، عامل الاضاءة ، عامل الرى وغيرها من العوامل) التى تحدد نمو حبة القمح ، فان وزنها يعتبر كمية تتغير تبعا لظروف « عشوائية » .

وبصرف النظر عن ان جميع الامثلة التى اوردناها غير متشابهة ، الا انها من وجهة النظر التى تهمنا الان ، تعتبر صورة واحدة . وفى كل من الامثلة السابقة ، نجد انفسنا امام كمية تعتبر بشكل او بآخر ، نتيجة مشاهدة عملية معينة . (مثلا ، حساب عدد الاجسام الكونية الساقطة على سطح الارض ، قياس طول التيلة) وتأخذ كل كمية من هذه الكميات قيما مختلفة فى العمليات المختلفة التى تبقى مختلفة مهما حاولنا جعل شروط حدوثها متجانسة ، تبعا لتغيرات عشوائية خارجة عن حسابنا فى ظروف هذه العمليات .

وتسمى مثل هذه الكميات فى علم نظرية الاحتمالات ، بالكميات العشوائية ، والامثلة التى اوردناها كافية لتثبت لنا اهمية دراسة الكميات العشوائية لتطبيق نظرية الاحتمالات فى مختلف مجالات المعرفة والمجالات العملية . وبالطبع ، لا تعنى معرفة كمية عشوائية

ما ، معرفة قيمتها العددية المحددة . وذلك لانه اذا علمنا مثلا ، ان مكثفا ما عمل ٥٣٢٤ ساعة قبل توقفه ، فان زمن تشغيله اصبح محددا (عبارة عن قيمة عددية) ويكف عن ان يكون كمية عشوائية .

ما الذى يجب ان نعلمه عن الكمية العشوائية لكى تكون عندنا جميع الادلة التى تثبت بانها كمية عشوائية بالذات ؟

يجب اولا وقبل كل شيء ، ان نعلم جميع القيم العددية التى يمكن لهذه الكمية ان تأخذها ، فاذا اختبرنا مدة تشغيل الصمامات الالكترونية مثلا وكان الحد الاعلى لهذه المدة ١٢١٠٨ ساعات والحد الادنى ٢٣٠٦ ساعات ، فان مدة استعمال الصمامات يمكن ان تأخذ جميع القيم الواقعة بين هذين الحدين .

ويتضح من المثال (٣) ان كمية الاجسام الكونية الساقطة على سطح الكرة الارضية فى خلال عام ، يمكن ان تأخذ اية قيمة صحيحة موجبة اى ان تأخذ القيم صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ .

غير ان معرفة القيم التى يمكن ان تأخذها الكمية العشوائية فقط ، لا تعطينا المعلومات اللازمة عنها والتى يمكن ان نعتبرها اداة لحساب التقديرات العملية اللازمة . واذا درسنا فى المثال الثانى حالة الغاز فى درجتى حرارة مختلفتين ، فان القيم العددية المختلفة الممكنة لسرعة الجزئ فى كلتا الحالتين ، هى نفسها ، ولذا ، فان تعداد هذه القيم لا يعطينا امكانية اجراء اية مقارنة بين درجتى الحرارة المذكورتين .

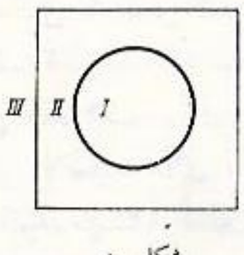
وبالرغم من ان درجات الحرارة المختلفة تحدث تغييرات متباينة فى حالة الغاز ، الا ان القيم المختلفة والممكنة لسرعة جزئ الغاز فقط ، لا تعطينا اية معلومات عن هذه التغييرات . واذا



اردنا تقدير درجة حرارة كتلة معينة من الغاز ، واعطينا فقط ، جدولا بقيم السرعات الممكنة لجزيئاته ، فانه من الطبيعى ان نتساءل ، كم من المرات شوهدت هذه السرعة او تلك ، او بمعنى آخر ، يجب بالطبع ان نسعى لمعرفة احتمال ان تأخذ الكمية العشوائية التى ندرسها قيمها المختلفة الممكنة .

## ١٩ – مفهوم قانون التوزيع

لنستعرض فى البداية المثال البسيط التالى : تجرى الرماية على هدف كما هو موضح فى الشكل ٨ . تسجل للرامى ثلاث نقط اذا اصاب المنطقة I ، ونقطتان اذا اصاب المنطقة II ، ونقطة واحدة * اذا اصاب المنطقة III .




شكل ٨

نعتبر عدد النقط التى يمكن ان يحصل عليها الرامى فى كل مرة كمية عشوائية . وتكون الارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، هنا بمثابة قيم ممكنة .ونرمز الى احتمالات هذه القيم الثلاث بـ $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$

* يمكن ان يعترض القارئ ويقول ان اصابة المنطقة III تعنى ان الرامى اخطأ الهدف ولا يصح ان تسجل له حتى ولو نقطة واحدة ، الا انه باعتبار ان الاشتراك فى الرمى فى حد ذاته يمنح الرامى نقطة واحدة ، فمن باب اولى ، ان تسجل له هذه النقطة حتى اذا لم يصب الهدف .

على التوالى ان $P_3$ مثلا تعنى احتمال اصابة المنطقة I ولو ان القيم الممكنة لهذه الكمية العشوائية بالنسبة لاى رام واحدة الا ان الاحتمالات $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$ يمكن ان تختلف فيما بينها اختلافا شديدا من رام لآخر . ومن الواضح ان هذا يحدد الاختلاف فى المقدرة على الاصابة. فللرامى الماهر مثلا يمكن ان يكون $p_1 = 0$ ، $p_2 = 0,2$ ، $p_3 = 0,8$ ، وللرامى المتوسط $p_3 = 0,3$ ، $p_2 = 0,5$ ، $p_1 = 0,2$ ، وللرامى الردئ $p_3 = 0,1$ ، $p_2 = 0,3$ ، $p_1 = 0,6$ .

واذا كانت عملية الرماية تتكون من ١٢ طلقة ، فان القيم الممكنة لعدد مرات اصابة كل من المناطق I ، II ، III يمكن ان تكون جميع الاعداد الصحيحة من الصفر حتى ١٢ . ولكن هذه الحقيقة لوحدها ، لا يمكن ان تعطينا ما يجعلنا نحكم على مستوى الرماية . وبالعكس ، يمكن الحكم على هذا المستوى اذا ما اعطينا بجانب القيم الممكنة لعدد مرات اصابة كل منطقة ، احتمال الحصول على هذه القيم ، اى الاعداد الدالة على مدى تكرار عدد معين من الاصابات لاى من المناطق اذا ما كررنا مجموعة الرميات المكونة من ١٢ طلقة .

وهكذا يكون الامر فى جميع الحالات ؛ اذ يمكن التعرف على مدى التكرار المنتظر لظهور قيمة او اخرى من القيم الممكنة للكمية العشوائية وذلك بمعرفة احتمالاتها . وهذا بالطبع يمكّننا من الحكم على مدى فعالية او جودة العملية المرتبطة بهذه الكمية العشوائية .

توضح التجربة ، انه اذا علمنا احتمالات القيم الممكنة للكمية العشوائية التى ندرسها ، فان هذا يكفى لحل اى سؤال يرتبط بهذه الكمية ، كمبيّن لفعالية العملية التى ندرسها .



وبهذا نكون قد وصلنا الى النتيجة التالية :

للتعرف على ماهية اية كمية عشوائية من هذا النوع ، من اللازم والكافى ان نعرف ما يلى :

١ ـ جدولا بجميع القيم الممكنة التى تأخذها هذه الكمية العشوائية .

٢ ـ احتمال كل من هذه القيم .

ومن هنا ، نرى ان الكمية العشوائية يجب ان تعرف على صورة جدول مكون من سطرين ـ يحتوى السطر الاول على ترتيب ما للقيم الممكنة لها والسطر الثانى على احتمالات هذه القيم فى المربعات ، المقابلة لها . اى انه تحت كل قيمة من القيم الممكنة ، نكتب احتمالها .

فى المثال السابق ، يمكن كتابة عدد النقط التى يحصل عليها الرامى الماهر كل مرة باعتبارها كمية عشوائية ، كالتالى :

(I)

| | | |
|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٣ |
| صفر | ٠,٢ | ٠,٨ |

وفى الحالة العامة ، اذا كانت $x_1$ ، $x_2$ ، ... ، $x_n$ هى القيم الممكنة للكمية العشوائية و $p_1$ ، $p_2$ ، ... ، $p_n$ هى احتمالات هذه القيم ، فان الكمية العشوائية تعرف بالجدول التالى :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

واذا أعطينا هذا الجدول ، اى اذا أعطينا جميع القيم الممكنة للكمية العشوائية واحتمالاتها فهذا يعنى – كما يقال – اننا أعطينا قانون توزيع هذه الكمية العشوائية . وبمعرفة قانون توزيع اية كمية عشوائية ، يمكن حل جميع المسائل المرتبطة بها .

مسألة : اذا كان قانون توزيع عدد النقط التى يحصل عليها رام معين فى كل مرة كما هو فى الجدول (I) ، وقانون توزيع نفس عدد النقط بالنسبة لرام آخر هو

| | | |
|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٣ |
| ٠,٢ | ٠,٥ | ٠,٣ |

(II)

اوجد قانون التوزيع لمجموع النقط التى يحصل عليها الراميان معا .

من الواضح ان المجموع المذكور هو كمية عشوائية . ومهمتنا الآن هى وضع جدول لها . لذلك يجب ان ندرس كافة النتائج الممكنة لعملية الاطلاق المشترك للراميين . ونضع هذه النتائج فى جدول بحيث يحسب احتمال كل نتيجة باستعمال قاعدة الضرب بالنسبة للحوادث المستقلة ، وباعتبار $x$ عدد النقط التى يحصل عليها الرامى الاول ، و $y$ عدد النقط التى يحصل عليها الرامى الثانى :

ويوضح هذا الجدول ، ان المجموع الذى يهمنا $x+y$ يمكن ان يأخذ القيم ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ وتعتبر القيمة ٢ بالنسبة له مستحيلة ، وذلك لان احتمالها يساوى صفرا * .

* يمكن اعتبار القيمة ٢ قيمة محتملة للمجموع x + y واحتمالها يساوى صفرا كما ذكرنا فى الجدول (I) للقيمة 1 وذلك كحالة عامة .

6 Зак 10122



| رقم النتيجة | x | y | x + y | احتمال النتيجة |
|---|---|---|---|---|
| ١) | ١ | ١ | ٢ | صفر × ٠,٢ = صفر |
| ٢) | ١ | ٢ | ٣ | صفر × ٠,٥ = صفر |
| ٣) | ١ | ٣ | ٤ | صفر × ٠,٣ = صفر |
| ٤) | ٢ | ١ | ٣ | ٠,٢ × ٠,٢ = ٠,٠٤ |
| ٥) | ٢ | ٢ | ٤ | ٠,٢ × ٠,٥ = ٠,١ |
| ٦) | ٢ | ٣ | ٥ | ٠,٢ × ٠,٣ = ٠,٠٦ |
| ٧) | ٣ | ١ | ٤ | ٠,٨ × ٠,٢ = ٠,١٦ |
| ٨) | ٣ | ٢ | ٥ | ٠,٨ × ٠,٥ = ٠,٤ |
| ٩) | ٣ | ٣ | ٦ | ٠,٨ × ٠,٣ = ٠,٢٤ |

وقد حصلنا على $x+y=3$ فى حالة النتيجتين ٢ و ٤ ، ولذلك فلكى يأخذ المجموع $x+y$ القيمة ٣ ، يجب ان تحدث احدى النتيجتين ٢ او ٤ . ومن قانون جمع الاحتمالات يكون احتمال هذه القيمة مساويا لمجموع احتمالى هاتين النتيجتين اى يساوى صفر + ٠,٠٤ = ٠,٠٤ .

واكى تتحقق المعادلة $x+y=4$ يجب ان تحدث احدى النتائج ٣ ) أو ٥ ) أو ٧ ) ، ويساوى احتمال هذه القيمة ( باستعمال قاعدة الجمع ثانية ) المقدار :

صفر + ٠,١ + ٠,١٦ = ٠,٢٦

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد احتمال ان يكون المجموع $x+y$ مساويا لـ ٥ وهذا الاحتمال يساوى

٠,٠٦ + ٠,٤ = ٠,٤٦

واحتمال القيمة ٦ التى تحدث فقط فى حالة النتيجة ٩ يساوى ٠,٢٤ ..

وبذلك نكون قد حصلنا على الجدول التالى للقيم الممكنة للكمية العشوائية $x+y$ :

(III)

| ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|
| ٠,٠٤ | ٠,٢٦ | ٠,٤٦ | ٠,٢٤ |

يعطينا الجدول (III) الحل النهائى لهذه المسألة .

ان مجموع الاحتمالات الأربعة فى الجدول (III) يساوى واحدا صحيحا ، وهذه الخاصية يجب ان تكون خاصية اى قانون توزيع ، وذلك لان هذا المجموع هو مجموع احتمالات جميع القيم الممكنة التى تأخذها الكمية العشوائية ، اى مجموع احتمالات مجموعة متكاملة من الحوادث . ويمكن استعمال خاصية قانون التوزيع هذه ككشاف ( ميزان ) لاختبار صحة الحسابات التى نجريها .



# القيمة المتوسطة

## ٢٠ ـ تعريف القيمة المتوسطة للكمية العشوائية

قد يحصل الراميان اللذان تحدثنا عنهما فى نهاية الباب السابق فى حالة اطلاقهما النار معا ، على ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ نقط وذلك تبعا لعوامل عشوائية تحدث اثناء اطلاق النار . وقد وجدنا احتمالات هذه النتائج الاربع الممكنة فى الجدول (III) على الصفحة ٩٨ واذا تساءلنا ، « كم من النقط يحصل عليها الراميان فى حالة اطلاقهما الرصاص معا ؟ » فاننا لن نستطيع الاجابة على هذا السؤال ، لان عمليات الاطلاق المختلفة تعطى نتائج مختلفة . ولكننا من اجل تحديد مستوى او كفاءة الراميين لن نهتم بالطبع ، بنتائج عمليات منفردة لاطلاق النار (حيث انه يمكن ان تكون هذه النتائج عشوائية ) ، بل سنهتم بالنتيجة المتوسطة لمجموعة كاملة من عمليات الاطلاق . كم من النقط يحصل عليها الراميان فى المتوسط بعد عملية اطلاق نار واحدة ؟ لقد وضع هذا السؤال بطريقة سليمة بحيث يمكن ايجاد اجابة واضحة عليه .

وسنحاول الحصول على الاجابة بالطريقة التالية :

اذا قام الراميان بمئة عملية اطلاق نار مزدوجة ، فان :

٤ عمليات بالتقريب ، تعطى كل منها ٣ نقط * .

* راجع الجدول (III) صفحة ( ٩٨ ) .

٢٦ عملية بالتقريب . تعطى كل منها ٤ نقط .
٤٦ عملية بالتقريب ، تعطى كل منها ٥ نقط .
٢٤ عملية بالتقريب ، تعطى كل منها ٦ نقط .

وعلى ذلك ، ففى كل مجموعة مكونة من مئة عملية اطلاق نار مزدوجة ، يحصل الراميان على العدد التالى من النقط الذى نعبر عنه بالمجموع :

٣ × ٤ + ٤ × ٢٦ + ٥ × ٤٦ + ٦ × ٢٤ = ٤٩٠ نقطة

وبقسمة هذا العدد على مئة ، نجد ان كل عملية اطلاق نار تعطى الرامبين فى المتوسط ، ٤,٩ نقطة . وهذا يعطينا الاجابة على السؤال الذى طرحناه . ونلاحظ انه بدلا من ان نقسم المجموع النهائى ( ٤٩٠ ) على ١٠٠ ( كما فعلنا الان ) ، كان من الممكن قبل ايجاد المجموع الكلى ، قسمة كل حد من حدوده على ١٠٠ ، وبذلك يعطينا المجموع الجديد مباشرة متوسط عدد النقط التى يحصل عليها الراميان فى كل عملية اطلاق نار . ومن الاسهل قسمة العدد الثانى من كل حد على ١٠٠ ، وذلك لان هذه الاعداد تساوى حاصل ضرب الاحتمالات الموضحة فى الجدول (III) فى ١٠٠ ، ولكى نقوم بقسمتها ثانية على ١٠٠ ، يكفى العودة الى هذه الاحتمالات . وعلى ذلك ، فاننا نحصل على العلاقة التالية لتحديد العدد المتوسط للنقط التى يحصل عليها الراميان فى عملية اطلاق نار واحدة :

٣ × ٠,٠٤ + ٤ × ٠,٢٦ + ٥ × ٠,٤٦ + ٦ × ٠,٢٤ = ٤,٩ نقطة

ان المجموع الوارد فى الطرف الايمن من هذه المتساوية ، كما هو واضح . مبنى على معطيات الجدول (III) وذلك بتطبيق قاعدة



بسيطة وهى : ضرب كل حد من حدود السطر الاعلى فى جدول القيم الممكنة فى الحد المكتوب تحته ، والذى يُعتبر احتمال هذه القيمة الممكنة . ثم جمع جميع هذه النتائج . لنطبق الان هذه الطريقة ، لايجاد القيمة المتوسطة فى الحالة العامة . لفرض انه أعطينا كمية عشوائية ما فى جدول كالتالى :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ |

لنتذكر ما اوردناه سابقا بالنسبة للاحتمالات : اذا كان احتمال ان تأخذ الكمية $x$ القيمة $x_1$ ، يساوى $p_1$ فهذا يعنى اننا فى كل مجموعة مكونة من $n$ من العمليات نلاحظ ظهور القيمة $x_1$ تقريبا $n_1$ من المرات ، حيث ان $\frac{n_1}{n} = p_1$ . ومن هنا نجد ان $n_1 = np_1$.

وبنفس الطريقة فاننا نقابل القيمة $x_2$ بمقدار $n_2$ مرة تقريبا $(n_2 = np_2)$ ، والقيمة $x_k$ تقابلنا بالتقريب $n_k = np_k$ مرة . وعلى ذلك فان مجموعة العمليات المكونة من $n$ عملية تحتوى على

$n_1 = np_1$ عملية يكون فيها $x = x_1$ ،
$n_2 = np_2$ عملية يكون فيها $x = x_2$ ،
. . . . . . . . . . . . . .
$n_k = np_k$ عملية يكون فيها $x = x_k$ .

ولذلك فان مجموع قيم $x$ فى كافة العمليات المتكونة من $n$ عملية اجريناها ، يساوى تقريبا :

$$x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k = n(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k).$$

وعلى ذلك فان القيمة المتوسطة $x$ للكمية العشوائية التى تظهر فى كل عملية على حدة ، والتى نحصل عليها بقسمة المجموع السابق على عدد العمليات فى المجموعة $n$ ، تساوى :

$$\overline{x} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k$$

وبذلك نكون قد توصلنا الى القاعدة الهامة التالية :

**لكى نحصل على القيمة المتوسطة للكمية العشوائية يجب ايجاد مجموع حواصل ضرب كل قيمة من قيم الكمية العشوائية الممكنة فى الاحتمال المناظر لها . ثم جمع كافة النتائج التى تم الحصول عليها بعد عملية الضرب .**

ما هى الفائدة التى تعطينا اياها القيمة المتوسطة للكمية العشوائية ؟ للاجابة على هذا السؤال بطريقة اكثر اقناعا ، نستعرض اولا بعض الامثلة :

مثال ١ . لنعد ثانية الى مسالة الراميين . ان النقط التى يحصل عليها كل منهما فى كل عملية رماية ، ما هى الا كمية عشوائية . وقد اوردنا قانونى توزيع هاتين الكميتين فى الجدول (I) بالنسبة للرامى الاول وفى الجدول (II) بالنسبة للرامى الثانى ( صفحة ٩٥ ) .

واذا ما نظرنا الى جدول كل رام نظرة فاحصة ، يتضح لنا ان الرامى الاول احسن من الثانى . وهذا بديهى . اذ ان احتمال الحصول على احسن نتيجة ( ٣ نقط ) بالنسبة للاول اعلى بكثير مما هو عليه بالنسبة للثانى . وفى نفس الوقت ، وعلى العكس ، فان احتمال النتائج السيئة بالنسبة للثانى اكبر مما هو عليه بالنسبة للاول . ومع ذلك فان هذه المقارنة غير مقنعة الى حد ما ، اذ انها تحمل خواص نوعية بحتة ، ولا نرى فى هذه المقارنة



مقياس ذلك العدد الذى تسمح قيمته بتقدير مستوى هذا الرامى او ذلك . وكما فى حالة درجة الحرارة مثلا ، فان درجة الحرارة توضح مباشرة ، مدى سخونة الجسم الطبيعى . واذا لم يكن عندنا هذا المقياس فستقابلنا دائما حالات لا تعطينا فيها الدراسة المباشرة اية نتيجة ، او تكون هذه النتيجة موضع نقاش . واذا اعطينا بدلا من الجدولين (I) ، (II) الجدولين ('I) بالنسبة للرامى الاول و ('II) بالنسبة للثانى ، فانه من الصعب تحديد اى من الراميين افضل من الآخر بمجرد القاء نظرة واحدة على هذين الجدولين . وفى الحقيقة ، فان احسن نتيجة ( ٣ نقط ) اكثر احتمالا بالنسبة للاول مما هى عليه بالنسبة للثانى وكذلك اسوأ نتيجة ( نقطة واحدة ) تكون ايضا اكثر احتمالا بالنسبة للاول مما هى عليه بالنسبة للثانى وبالعكس ، فان النتيجة ( نقطتان ) اكثر احتمالا بالنسبة للثانى مما هى عليه بالنسبة للاول .

(I')

| ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|
| ٠,٤ | ٠,١ | ٠,٥ |

(II')

| ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|
| ٠,١ | ٠,٦ | ٠,٣ |

وباستعمال القاعدة السابقة ، نجد الان القيمة المتوسطة لعدد النقط التى يحصل عليها كل من الراميين فى كل مرة وهى :

١ — بالنسبة للرامى الاول

١ × ٠,٤ + ٢ × ٠,١ + ٣ × ٠,٥ = ٢,١

٢ — بالنسبة للرامى الثانى

١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٦ + ٣ × ٠,٣ = ٢,٢

ومن هنا نلاحظ ان الرامى الثانى يحصل فى المتوسط ، على عدد من النقط اكثر بقليل من الرامى الاول . وهذا يعنى عمليا ، انه اذا ما تكرر اطلاق النار عدة مرات ، فان الرامى الثانى بوجه عام يحصل على نتيجة أحسن من نتيجة الرامى الاول الى حد ما . والان نستطيع بكل تأكيد ان نقول بان الرامى الثانى احسن من الاول . فقد اعطتنا القيمة المتوسطة لعدد النقط التى يحصل عليها كل منهما ، مقياسا مناسبا نستطيع بمساعدته بسهولة وبدون اى شك ، المقارنة بين مستويات رماة مختلفين .

مثال ٢ . عند تجميع جهاز قياس وبغية القيام بمواءمة دقيقة لاحدى قطع الغيار الدقيقة، نضطر الى اجراء عدد من التجارب (١ او ٢ او ٣ او ٤ او ٥ تجارب) ، وذلك تبعا لمقدار نجاح كل عملية . وعلى ذلك ، فان $x$ (عدد التجارب اللازمة للحصول على تجميع مرض) هو عبارة عن كمية عشوائية تأخذ القيم الممكنة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ . نفرض انه اعطينا احتمالات هذه القيم حسب الجدول التالى :

| ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|
| ٠,٠٧ | ٠,١٦ | ٠,٥٥ | ٠,٢١ | ٠,٠١ |

ويمكن ان تكون امامنا مسألة امداد العامل بعدد من قطع الغيار اللازمة لتجميع ٢٠ جهازا *. ولكى نستطيع تقدير هذا العدد

* سنفترض ان قطعة الغيار التى تعطب اثناء احدى عمليات تجميع احد الاجهزة ، لا تستعمل فى تجميع الاجهزة الاخرى .



بالتقريب ، لا يمكن استعمال هذا الجدول مباشرة . فالجدول يوضح فقط ، ان هناك اختلافا محتملا يحدث من حالة الى اخرى . اما اذا اوجدنا القيمة المتوسطة $\bar{x}$ لعدد التجارب $x$ اللازمة لتجميع جهاز واحد ، وضربنا هذه القيمة المتوسطة فى ٢٠ ، فاننا سنحصل بالتقريب ، على قيمة العدد المطلوب من قطع الغيار . لذلك نجد ان :

$$\bar{x} = 1 \cdot 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}55 + 4 \cdot 0{,}21 + 5 \cdot 0{,}01 = 2{,}93;$$
$$20\bar{x} = 2{,}93 \cdot 20 = 58{,}6 \approx 59$$

ولكى يكون عند العامل عدد كاف من قطع الغيار الاحتياطية لاستعمالها فى حالة ما اذا زاد العدد المطلوب منها عن العدد المتوقع ، فمن المفيد عمليا اعطاؤه من ٦٠ الى ٦٥ قطعة غيار .

ونلاحظ فى الامثلة السابقة، باننا قد تعرضنا الى بعض المسائل التى تتطلب ايجاد قيمة تقريبية لكمية عشوائية معينة، الا اننا لا نستطيع الاجابة على هذا السؤال بمجرد النظر الى جدول هذه الكمية . اذ ان الجدول يبين لنا فقط ، ان الكمية العشوائية تستطيع ان تأخذ قيما معينة باحتمالات معينة . ولكن القيمة المتوسطة المحسوبة باستخدام هذا الجدول ، تعطينا القيمة التقديرية . وذلك لانها هى بالذات تلك القيمة التى تأخذها الكمية العشوائية فى المتوسط ، اذا ما تكررت الى حد ما ، مجموعة العمليات التى تنتج عنها هذه الكمية وتوضح القيمة المتوسطة لنا عمليا ، خواص الكمية العشوائية وذلك عندما يجرى الحديث عن مجموعة كبيرة من العمليات او العمليات التكرارية .

مسألة ١ . تجرى مجموعة من الاختبارات بحيث يكون احتمال ظهور حادثة معينة $A$ فى كل تجربة متساويا $p$ . فاذا علم بان

نتائج هذه الاختبارات مستقلة عن بعضها ، اوجد القيمة المتوسطة لعدد مرات وقوع الحادثة $A$ فى مجموعة من الاختبارات عددها $n$ .

ان عدد مرات وقوع الحادثة $A$ فى مجموعة من الاختبارات عددها $n$ هو كمية عشوائية تأخذ القيم الممكنة $(0, 1, 2, \ldots, n)$ وبما ان احتمال القيمة $k$ كما نعلم . يساوى

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

فان القيمة المتوسطة المطلوبة تساوى

$$\sum_{k=0}^{n} k P_n(k)$$

وقد اوجدنا قيمة هذا المجموع عندما اثبتنا نظرية برنولى ( صفحة ٨٣ ) ولاحظنا انها تساوى $np$ . وهناك تأكدنا من ان القيمة الاكثر احتمالا لعدد مرات وقوع الحادثة $A$ عندما تكون $n$ كبيرة ، قريبة من $np$ . اما الآن فاننا نلاحظ ان القيمة المتوسطة لعدد مرات وقوع الحادثة $A$ تساوى بالضبط $np$ لاية قيمة تأخذها $n$ .

وعلى ذلك ، ففى هذه الحالة تنطبق القيمة الاكثر احتمالا للكمية العشوائية مع قيمتها المتوسطة . ولكن يجب الحذر ، وعدم تعميم هذه النتيجة على اية كمية عشوائية . اذ يحدث احيانا ان تختلف القيمة المتوسطة عن القيمة الاكثر احتمالا اختلافا كبيرا ، فالقيمة الاكثر احتمالا للكمية العشوائية التى يكون قانونها التوزيعى على الصورة التالية :

| | | |
|---|---|---|
| صفر | ٥ | ١٠ |
| ٠٫٧ | ٠٫١ | ٠٫٢ |

تساوى صفرا . فى حين ان قيمتها المتوسطة تساوى ٢٫٥ .



مسألة ٢ . اجريت مجموعة من الاختبارات المستقلة وكان احتمال وقوع حادثة معينة $A$ فى كل منها ، يساوى ٠٫٨ . واستمر اجراء الاختبارات حتى وقوع الحادثة $A$ لاول مرة .اوجد القيمة المتوسطة لعدد الاختبارات اذا كان العدد الكلى لها لا يزيد عن اربع .

ان عدد الاختبارات اللازم اجراؤها حسب شروط المسألة ، يمكن ان يساوى ١ او ٢ او ٣ او ٤ . لذلك يجب علينا حساب احتمال كل من هذه القيم الاربع . فاذا كان المطلوب اجراء اختبار واحد ، لوجب ان تقع الحادثة $A$ فى الاختبار الاول . ويساوى احتمال ان تحدث هذه النتيجة :

$$p_1 = 0{,}8$$

واذا اضطررنا الى اجراء اختبارين ، فهذا يعنى ان الحادثة $A$ لم تقع فى الاختبار الاول بل وقعت فى الثانى . ومن قاعدة ضرب الاحتمالات ، ينتج ان احتمال هذه الحالة يساوى

$$p_2 = (1 - 0.8) \cdot 0{,}8 = 0{,}16$$

واذا اجرينا ثلاثة اختبارات ، فهذا يعنى ان الحادثة $A$ لم تقع فى الاختبارين الاول والثانى بل وقعت فى الثالث ، ولذلك فان

$$p_3 = (1 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}032$$

واخيرا ، واذا اضطررنا الى اجراء اربعة اختبارات ، فمعنى هذا ، ان الحادثة $A$ لم تقع فى الاختبارات الثلاثة الاولى ( بصرف النظر عما يعطيه الاختبار الرابع ) ، ولذلك فان :

$$p_4 = (1 - 0{,}8)^3 = 0{,}008$$

وعلى ذلك . فان قانون توزيع عدد مرات اجراء الاختبارات باعتباره كمية عشوائية يكون كالتالى :

| ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|
| ٠,٨ | ٠,١٦ | ٠,٠٣٢ | ٠,٠٠٨ |

ان القيمة المتوسطة لهذا العدد تساوى

١ × ٠,٨ + ٢ × ٠,١٦ + ٣ × ٠,٠٣٢ + ٤ × ٠,٠٠٨ = ١,٢٤٨

واذا كان المطلوب الحصول على ١٠٠ مشاهدة لهذه الحادثة ، فانه من المتوقع ان نجرى ١,٢٤٨ × ١٠٠ ≈ ١٢٥ اختبارا تقريبا .

وكثيرا ما تقابلنا مثل هذه المسائل فى الحياة العملية . وعلى سبيل المثال ، اذا اختبرنا متانة شلة خيوط ، فاننا نعتبرها من الصنف الممتاز اذا لم تنقطع خيوطها ولا مرة واحدة ، عندما تحمل ثقلا يساوى $P$ . وفى هذه الحالة ، نختبر عينة من خيوط ذات طول معين من نفس البكرة (او من نفس الانتاج) . وفى كل مرة تختبر اربع عينات على الاكثر .

مسألة ٣ . رقعة معينة على شكل مربع يساوى طول ضلعه المقاس من الجو ، ٣٥٠ مترا . فاذا كانت نوعية القياس من الجو تحدد على الشكل التالى :

للخطأ فى صفر من الامتار ، احتمال مقداره ٠,٤٢

للخطأ فى ± ١٠ امتار ، احتمال مقداره ٠,١٦ *

* هذا يعنى ان احتمال الخطأ لكل من + ١٠ امتار و − ١٠ امتار هو ٠,١٦ ، وهكذا يجب فهم جميع الاحتمالات الاخرى المذكورة بعده .



للخطأ فى ± ٢٠ مترا ، احتمال مقداره ٠,٠٨

للخطأ فى ± ٣٠ مترا ، احتمال مقداره ٠,٠٥

اوجد القيمة المتوسطة لمساحة هذه الرقعة .

تبعا للعشوائية فى القياس من الجو ، يصبح طول ضلع المربع كمية عشوائية ذات قانون توزيع موضح فى الجدول التالى :

(1)

| ٣٢٠ | ٣٣٠ | ٣٤٠ | ٣٥٠ | ٣٦٠ | ٣٧٠ | ٣٨٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠,٠٥ | ٠,٠٨ | ٠,١٦ | ٠,٤٢ | ٠,١٦ | ٠,٠٨ | ٠,٠٥ |

ومن هنا ، يمكن ايجاد القيمة المتوسطة لهذه الكمية مباشرة . وفى هذه الحالة ليس ثمة داع لاستعمال قاعدة حساب القيمة المتوسطة . ففى الواقع ، بما ان الاخطاء المتساوية فى هذا الاتجاه او ذاك (اى الزيادة او النقصان) ذات احتمال واحد ، فانه يتضح من التماثل ، ان القيمة المتوسطة لطول ضلع المربع تساوى القيمة المشاهدة اى تساوى ٣٥٠ مترا . وبتفصيل اكثر ، تحتوى علاقة القيمة المتوسطة على الحدود :

(٣٤٠ + ٣٦٠) ٠,١٦ =

= [ (٣٥٠ + ١٠) + (٣٥٠ − ١٠) ] ٠,١٦ = ٢×٣٥٠×٠,١٦

(٣٣٠ + ٣٧٠) ٠,٠٨ = ٢×٣٥٠×٠,٠٨

(٣٢٠ + ٣٨٠) ٠,٠٥ = ٢×٣٥٠×٠,٠٥

ولذلك ، فان القيمة المتوسطة تساوى

٣٥٠ (٠,٤٢ + ٢×٠,١٦ + ٢×٠,٠٨ + ٢×٠,٠٥) = ٣٥٠

كان من الممكن بنفس الطريقة ان نعتقد بان القيمة المتوسطة يجب ان تساوى نتيجة التماثل (٣٥٠)² = ١٢٢٥٠٠ متر مربع . وهذا صحيح فقط ، اذا كانت القيمة المتوسطة لمربع الكمية العشوائية تساوى مربع القيمة المتوسطة لهذه الكمية . ولكن هذا ليس صحيحا فى مثالنا ، حيث ان مساحة المربع يمكن ان تأخذ القيم ٣٢٠² ، ٣٣٠² ، ٣٤٠² ، ٣٥٠² ، ٣٦٠² ، ٣٧٠² ، ٣٨٠² .

واية قيمة من هذه القيم ، تظهر تبعا لظهور الحالات السبع المذكورة فى الجدول (ا) . اى ان احتمالات هذه القيم هى احتمالات القيم الموجودة فى الجدول (ا) نفسها . وباختصار ، يكون قانون توزيع هذه القيم كالتالى :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣٢٠² | ٣٣٠² | ٣٤٠² | ٣٥٠² | ٣٦٠² | ٣٧٠² | ٣٨٠² |
| ٠,٠٥ | ٠,٠٨ | ٠,١٦ | ٠,٤٢ | ٠,١٦ | ٠,٠٨ | ٠,٠٥ |

وبناء عليه ، فان القيمة المتوسطة لها تساوى :

٣٢٠² × ٠,٠٥ + ٣٣٠² × ٠,٠٨ + ٣٤٠² × ٠,١٦ + ٣٥٠² × ٠,٤٢ +
+ ٣٦٠² × ٠,١٦ + ٣٧٠² × ٠,٠٨ + ٣٨٠² × ٠,٠٥

ولاختصار الحسابات يستحسن ان نأخذ فى الاعتبار كذلك ، التماثل الموجود . ولذا ، يجب التمرن على كيفية اجراء هذه الحسابات ، ذلك لان مثل هذه الحسابات تقابلنا كثيرا . ويمكن اعادة كتابة العلاقة السابقة على الصورة التالية :

٣٥٠² × ٠,٤٢ + (٣٤٠² + ٣٦٠²) × ٠,١٦ + (٣٣٠² + ٣٧٠²) ×
× ٠,٠٨ + (٣٢٠² + ٣٨٠²) × ٠,٠٥ = ٣٥٠² × ٠,٤٢ +



+ [(٣٥٠ − ١٠)² + (٣٥٠ + ١٠)²] × ٠,١٦ + [(٣٥٠ − ٢٠)² +
+ (٣٥٠ + ٢٠)²] × ٠,٠٨ + [(٣٥٠ − ٣٠)² + (٣٥٠ + ٣٠)²] ×
× ٠,٠٥ = ٣٥٠² [٠,٤٢ + ٢ × ٠,١٦ + ٢ × ٠,٠٨ + ٢ × ٠,٠٥] + ٢ × ١٠² ×
× ٠,١٦ + ٢ × ٢٠² × ٠,٠٨ + ٢ × ٣٠² × ٠,٠٥ = ٣٥٠² + ٢ × (١٦ + ٣٢ +
+ ٤٥) = ١٢٢٦٨٦ .

فى هذه الحالة ، يمكن اجراء جميع الحسابات ذهنيا ، وبدون كتابة .

ونلاحظ ان القيمة المتوسطة لمساحة المربع اكبر قليلا (الزيادة فى هذه الحالة غير محسوسة عمليا) من مربع القيمة المتوسطة لطول الضلع (اى اكبر من ٣٥٠² = ١٢٢٥٠٠) . ومن السهل اثبات وجود قاعدة عامة على هذا الاساس وهى : ان القيمة المتوسطة لمربع اية كمية عشوائية تكون دائما اكبر من مربع القيمة المتوسطة لهذه الكمية . ولنفرض ان هناك كمية عشوائية $x$ ذات قانون توزيع على الصورة التالية :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ |

عندئذ تكون لقانون توزيع الكمية العشوائية $x^2$ الصورة الآتية

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1^2$ | $x_2^2$ | ... | $x_k^2$ |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ |

والقيمة المتوسطة لهاتين الكميتين تساوى على التناظر

$$\overline{x} = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k$$

و

$$\overline{x^2} = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots + x_k^2p_k$$

نعلم أن

$$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - 2(\overline{x})^2 + (\overline{x})^2$$

وبما ان $p_1+p_2+\dots+p_k=1$ ، فانه يمكن كتابة الحدود الثلاثة الموجودة فى الطرف الايمن على الصورة التالية :

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2p_i$$

$$2(\overline{x})^2 = 2(\overline{x})(\overline{x}) = 2\overline{x}\sum_{i=1}^{k}x_ip_i = \sum_{i=1}^{k}2\overline{x}x_ip_i$$

$$(\overline{x})^2 = (\overline{x})^2\sum_{i=1}^{k}p_i = \sum_{i=1}^{k}(\overline{x})^2p_i$$

ولذلك فان

$$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k}\{x_i^2 - 2\overline{x}x_i + (\overline{x})^2\}p_i = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2p_i$$

وبما ان جميع حدود المجموع الموجودة فى الطرف الايمن ليست سالبة ، فان

$$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 > 0$$

وهو المطلوب اثباته .

الباب التاسع

# القيمة المتوسطة للمجموع وحاصل الضرب

## ٢١ ـ نظرية حول القيمة المتوسطة للمجموع

كثيرا ما يلزمنا ايجاد القيمة المتوسطة لحاصل جمع كميتين عشوائيتين ( واحيانا اكثر من كميتين ) وذلك بمعلومية القيمة المتوسطة لكل منها . لنفرض على سبيل المثال ، ان مصنعين ينتجان سلعة واحدة . واذا علمنا بان المصنع الاول ينتج فى المتوسط ، ١٢٠ قطعة يوميا ، والثانى ١٨٠ قطعة ، فهل يمكننا بمساعدة هذه المعطيات ، ان نجد القيمة المتوسطة لعدد القطع التى يتوقع ان ينتجها المصنعان معا يوميا ؟ او ان هذه المعطيات وحدها لا تكفى ، ويجب ان نعلم . علاوة على القيمة المتوسطة لكل كمية ، بيانات اخرى عن هاتين الكميتين العشوائيتين ( كقانون التوزيع مثلا ) ؟

من المهم جدا ان نلاحظ انه لحساب القيمة المتوسطة للمجموع . يكفى فى جميع الحالات ، معرفة القيمة المتوسطة لكل كمية عشوائية فى المجموع . واننا نعبر عن القيمة المتوسطة للمجموع فى جميع الحالات . بدلالة القيمة المتوسطة لكل كمية بطريقة بسيطة جدا ، وهى :

**ان القيمة المتوسطة للمجموع تساوى مجموع القيم المتوسطة لكل كمية عشوائية داخلة فى هذا المجموع**

وبناء على ذلك، فاذا كانت $x, y$ اية كميتين عشوائيتين، فان :

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$$

وفي المثال السابق . اذا كانت $x$ هى عدد القطع التى ينتجها المصنع الاول ، $y$ ـ عدد القطع التى ينتجها المصنع الثانى . وكان $\overline{x}=120, \overline{y}=180$ فان

$$\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=300$$

ولاثبات هذه القاعدة فى الحالة العامة ، نفرض ان قانونى توزيع الكميتين العشوائيتين $x, y$ يكونان على الصورة التالية :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ | (I) |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_l$ | (II) |
| $q_1$ | $q_2$ | ... | $q_l$ | |

وعلى ذلك . فان القيم الممكنة للكمية $x+y$ هى جميع القيم الممكنة للمجموع الذى يكون على الصورة $x_i+y_j$ حيث $1 \leqslant i \leqslant k$ و $1 \leqslant j \leqslant l$. نجد الان احتمال القيمة $(x_i+y_j)$ ولنرمز اليه بـ $p_{ij}$ . هذا الاحتمال يساوى احتمال الحادثة المزدوجة $x=x_i,\ y=y_j$ ، اى انه احتمال ان تأخذ الكمية $x$ القيمة $x_i$ والكمية $y$ القيمة $y_j$ واذا امكننا اعتبار ان الحادثتين مستقلتان عن بعض ، فمن قاعدة الضرب يكون :

$$p_{ij}=p_i q_j \qquad (1)$$

ولكننا لن نفترض اطلاقا استقلال هاتين الحادثتين عن بعضهما . وعلى ذلك ، فان العلاقة (1) بوجه عام غير صحيحة . ويجب ان نأخذ بالاعتبار ، ان قيم الجدولين $(I)$ ، $(II)$ على العموم لا تعطينا اى جديد لحساب المقادير $p_{ij}$ ومن القاعدة العامة لايجاد القيمة المتوسطة ، نعلم ان القيمة المتوسطة للكمية $x+y$ تساوى مجموع



حواصل ضرب كل قيمة ممكنة لهذه الكمية فى الاحتمال المقابل ، اى ان :

$$\overline{x+y}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{k}x_i\Big(\sum_{j=1}^{l}p_{ij}\Big)+\sum_{j=1}^{l}y_j\Big(\sum_{i=1}^{k}p_{ij}\Big) \qquad (2)$$

لنبحث الان المجموع $\sum_{j=1}^{l}p_{ij}$ بانتباه . وهو مجموع احتمالات جميع الحوادث الممكنة التى تكون على الصورة $(x=x_i,\ y=y_j)$ حيث العدد $i$ واحد فى جميع حدود المجموع ، اما العدد $j$ فيتغير من حد الى حد ، ويأخذ جميع القيم الممكنة (من 1 حتى $l$) وبما ان الحوادث $y=y_j$ لقيم $j$ المختلفة متنافية بالطبع مع بعض ، فانه من قاعدة الجمع ينتج ان المجموع $\sum_{j=1}^{l}p_{ij}$ هو احتمال وقوع اى من الـ $l$ حادثة $(x=x_i,\ y=y_j)$ حيث $(j=1,2,\ldots,l)$.

ولكن اذا قلنا وقوع حادثة ما من الحوادث $x=x_i, y=y_j$ (حيث $1 \leqslant j \leqslant l$) هو نفسه ، كما لو قلنا « وقوع الحادثة $x=x_i$ وذلك لأنه : ١) اذا وقعت احدى الحوادث $(x=x_i,\ y=y_j)$ ( بصرف النظر عن قيمة $j$ ) فهذا يعنى وقوع الحادثة $x=x_i$ ؛ ٢) وبالعكس اذا وقعت الحادثة $x=x_i$ ، فبما ان $y$ لا بد وان تأخذ اية قيمة من قيمها الممكنة $y_1, y_2, \ldots, y_l$ فانه لا بد وان تقع احدى الحوادث $(x=x_i,\ y=y_j)$ حيث $1 \leqslant j \leqslant l$ وعلى ذلك ، فان $\sum_{j=1}^{l}p_{ij}$ اى احتمال وقوع اى من الحوادث $(x=x_i,\ y=y_j)$ حيث $1 \leqslant j \leqslant l$ يساوى احتمال وقوع الحادثة $x=x_i$ أى أن

$$\sum_{j=1}^{l}p_{ij}=p_i$$

وبنفس الطريقة يمكن بالطبع التأكد من ان

$$\sum_{i=1}^{k} p_{ij} = p'_j$$

وبالتعويض عن هذه المقادير فى العلاقة (2) نجد أن :

$$\overline{x+y} = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i + \sum_{j=1}^{l} p'_j y_j = \overline{x} + \overline{y}$$

وهو المطلوب اثباته .

ويمكن تعميم هذه النظرية بحيث تنطبق على حالة ما اذا لم يكن عدد الكميات العشوائية اثنين ، بل ثلاث كميات او اكثر . وباستعمال نفس النظرية التى اثبتناها سابقا ، يمكننا كتابة ما يلى :

$$\overline{x+y+z} = \overline{x+y} + \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

وهكذا .

مثال: يوجد فى احد المصانع عدد $n$ من الآلات. اخذت سلعة واحدة من انتاج كل آلة . اوجد القيمة المتوسطة لعدد السلع الرديئة اذا علم بان احتمال انتاج سلعة رديئة على الآلة الاولى ، يساوى $p_1$ وعلى الآلة الثانية $p_2$ وعلى الآلة رقم $n$ يساوى $p_n$ .

بما ان عندنا سلعة واحدة فقط من انتاج كل آلة ، فان عدد السلع الرديئة المنتجة على كل آلة ، يعتبر كمية عشوائية تأخذ القيمتين الممكنتين : واحدا صحيحا اذا كانت هذه السلعة رديئة ، وصفرا اذا كانت جيدة . بالنسبة للالة الاولى ، احتمال هاتين القيمتين يساوى على الترتيب $1-p_1$ ، $p_1$ ومن ذلك ينتج ، ان القيمة المتوسطة لعدد السلع الرديئة المأخوذة من انتاج الآلة الاولى يساوى

$$1 \cdot p_1 + 0(1-p_1) = p_1$$



اما بالنسبة للالة الثانية ، فان القيمة المتوسطة لعدد السلع الرديئة المأخوذة من انتاجها يساوى $p_2$ وهكذا . ان العدد الكلى للسلع الرديئة يساوى مجموع اعداد تلك السلع الموجودة بين السلع المنتجة على الآلة الاولى والثانية .... وباقى الآلات .

ولذلك فباستعمال القاعدة التى اثبتناها الان بالنسبة لمجموع القيم المتوسطة ، تكون القيم المتوسطة لعدد السلع الرديئة بين السلع التى اخترناها مساوية لـ :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

وهو الحل المطلوب للمسألة المطروحة .

وفى الحالة الخاصة ، عندما تكون احتمالات السلعة الرديئة واحدة بالنسبة لجميع الآلات $(p_1 = p_2 = \dots = p_n = p)$ فان القيمة المتوسطة للعدد الكلى للسلع الرديئة يساوى $np$. وقد حصلنا على هذه النتيجة فى الصفحة ٨٥ [العلاقة (5)] .

ومن المهم مقارنة الطريقة المعقدة التى احتجنا اليها فى ايجاد هذه النتيجة ، مع الطريقة البسيطة التى استخدمناها حاليا والتى لا تتطلب اية حسابات مطوّلة وتوصلنا لنفس النتيجة . ولكننا لم نبسط الطريقة فقط بل عممناها ايضا . فى الحالة الاولى ، افترضنا ان نتائج تصنيع السلع المنفردة تعتبر حوادث مستقلة عن بعضها البعض . وبالطبع تستخدم الطريقة السابقة فى حالة وجود هذا الفرض فقط . اما الان ، فيمكن ايجاد النتيجة بدون استخدام هذا الفرض ، ذلك لان قاعدة جمع القيم المتوسطة التى استخدمناها فى الطريقة الجديدة صحيحة بالنسبة لاية كميات عشوائية ، وبدون اية شروط وعلى ذلك ، فانه مهما كان الارتباط بين الآلات المختلفة والسلع

المنتجة عليها ( بشرط ان يكون احتمال انتاج سلعة رديئة $p$ واحدا لجميع الالات ) فان القيمة المتوسطة لعدد السلع الرديئة بين السلع التى اخترناها والتى عددها $n$ ، دائما تساوى $np$ .

### ٢٢ – نظرية القيمة المتوسطة لحاصل الضرب

كثيرا ما يقابلنا السؤال ، الذى وجدنا حله فى حالة مجموع الكميات العشوائية ، فى حالة حاصل الضرب ايضا . لنفرض ان الكميتين العشوائيتين $y$ ، $x$ تحققان قانونى التوزيع الموضحين فى الجدولين ($I$) و ($II$) عندئذ يكون حاصل ضرب $xy$ كمية عشوائية ايضا ، والقيم الممكنة لهذه الكمية . هى جميع حواصل الضرب التى على الصورة $x_i y_j$ ($1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant l$) . واحتمال القيمة $x_i y_j$ هو $p_{ij}$ والمطلوب هو ايجاد القاعدة التى تسمح بحساب القيمة المتوسطة $\overline{xy}$ للكمية العشوائية $xy$ كدالة فى القيمة المتوسطة لكل من $y$ و $x$ . لكنه اتضح ان الاجابة على هذا السؤال فى الحالة العامة مستحيلة . ففى الحالة العامة لا يمكن تعيين قيمة واحدة $\overline{xy}$ بمعلومية القيمتين المتوسطتين $\bar{y}$ . $\bar{x}$ (اى انه لكل قيمة واحدة من قيم $\bar{y}$ ، $\bar{x}$ يمكن ايجاد قيم مختلفة ($\overline{xy}$) وعلى ذلك فانه لا توجد قاعدة عامة لتعيين $\overline{xy}$ كدالة فى $\bar{y}$ ، $\bar{x}$ .

وتوجد هناك حالة واحدة مهمة يمكن فيها ايجاد هذه العلاقة . وفى هذه الحالة تكون هذه العلاقة على صورة مبسطة جدا . نعتبر الكميتين العشوائيتين مستقلتين عن بعض اذا كانت الحادثتان $y = y_j$ ، $x = x_i$ لاية قيمة $j$ ، $i$ مستقلتين عن بعض . اى انه اذا اخذت احدى الكميتين العشوائيتين قيمة او اخرى معينة من قيمها الممكنة ، فانها لا تؤثر على قانون توزيع الكمية العشوائية الاخرى . واذا كانت الكميتان



$y$ ، $x$ مستقلتين عن بعضهما البعض حسب المفهوم الذى شرحناه عاليا فان :

$$p_{ij} = p_i p'_j \, (i = 1, 2, \ldots, k; \; j = 1, 2, \ldots, l)$$

من قاعدة الضرب للحوادث المستقلة ينتج ان

$$\overline{xy} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_i y_j p_i p'_j = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i \sum_{j=1}^{l} y_j p'_j = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

**اى ان القيمة المتوسطة لحاصل ضرب كميتين عشوائيتين مستقلتين عن بعضهما البعض يساوى حاصل ضرب قيمتيهما المتوسطة .**

وكما هو فى حالة الجمع ، فان هذه القاعدة المستنتجة من قبلنا بالنسبة لحاصل ضرب كميتين عشوائيتين ، يمكن ان تعمم على حاصل ضرب اى عدد من تلك الكميات . والمطلوب فقط ان تكون هذه الكميات مستقلة عن بعض . اى انه اذا اخذت احدى الكميات اية قيمة من قيمها الممكنة ، فانها لا تؤثر على قوانين توزيع الكميات الاخرى .

مثال ١ – نفرض ان المطلوب هو قياس مساحة رقعة على هيئة مستطيل بواسطة القياس من الجو . وان قياس طول ضلع المستطيل اعطانا ٨٢ مترا وعرضه ٥٠ مترا . وان قانون توزيع الخطا فى القياس غير معلوم ولكننا نعلم فقط ان احتمال الخطأ الواحد فى احد الاضلاع او فى الآخر متساو . فانه من التماثل يتضح ان ( ويمكن بسهولة اثبات هذا « راجع المسألة ٣ – صفحة ١٠٨ » ) القيمة المتوسطة لطول كل ضلع تنطبق على نتيجة القياس التى حصلنا عليها . فاذا استطعنا ان نعتبر ان نتيجتى القياس كميتان عشوائيتان مستقلتان

عن بعض ، فحسب القاعدة التى ذكرناها سابقا ينتج ان القيمة المتوسطة لمساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب القيمتين المتوسطتين لطول ضلعيه ، اى ان ٧٢×٥٠=٣٦٠٠ م٢. ولكنه يحدث احيانا ان نفترض ان نتيجة قياس الاضلاع كمية غير مستقلة ، وهذا يحدث فى حالة ما اذا كان القياس يجرى بنفس الاجهزة غير الدقيقة تماما . اذا اعطى قياس الطول نتيجة ، تزيد عن الطول الحقيقى بكثير فانه من الطبيعى ان نفترض ان يعطينا جهاز القياس على العموم قيما كبيرة جدا . ونتيجة لذلك يزداد احتمال زيادة قيمة العرض ايضا عن القيمة الحقيقية . ولذا فانه لا يمكن اعتبار هاتين الكميتين مستقلتين عن بعض . وفى هذه الحالة لا يمكن ايضا اعتبار ان القيمة المتوسطة للمساحة تساوى حاصل ضرب القيمتين المتوسطتين لطولى الضلعين . ولتعيين هذه القيمة المتوسطة نحتاج لمعلومات اضافية اخرى .

مثال ٢ – تيار يمر فى موصل تعتمد مقاومته على عوامل عشوائية . وتختلف شدة التيار ايضا من حالة لاخرى ، مع العلم بان القيمة المتوسطة لمقاومة الموصل تساوى ٢٥ أوما والقيمة المتوسطة لشدة التيار تساوى ٦ أمبيرات .

المطلوب ايجاد القيمة المتوسطة للقوة الدافعة الكهربائية $E$ للتيار المار فى الموصل .

حسب قانون أوم ، نعلم ان

$$E = RI$$

حيث ان $R$ – مقاومة الموصل ، $I$ – شدة التيار . وبما ان

$$\overline{R} = 25,\ \overline{I} = 6$$

وبفرض ان الكميتين $R, I$ مستقلتان عن بعض ، نجد ان

$$\overline{E} = \overline{R}\,\overline{I} = 25 \cdot 6 = 150v$$

الباب العاشر

# التشتت والانحراف المعيارى (المتوسط)

## ٢٣ – قصور القيمة المتوسطة عن تحديد خواص الكمية العشوائية

لقد لاحظنا اكثر من مرة ان القيمة المتوسطة للكمية العشوائية تعطينا صورة تقريبية عنها ، وتقابلنا حالات عملية كثيرة تكون فيها هذه الصورة كافية . فلمقارنة مستوى راميين فى مسابقة اطلاق النار مثلا ، يكفى ان نعلم القيمة المتوسطة لعدد النقط التى يحصل عليها كل منهما . وكذلك لمقارنة كفاءة الطرق المختلفة فى حساب عدد الجسيمات الكونية ، تكفى معرفة القيمة المتوسطة لعدد الجسيمات الكونية المفقودة فى حالة استخدام كل من هذه الطرق ، الخ . وفى جميع هذه الحالات ، نحصل على فائدة كبيرة عند تحديد الكمية العشوائية باستعمال عدد واحد هو قيمتها المتوسطة ، بدلا من ان نعرفها باستخدام قانون توزيعها الصعب . اذ يتحول الامر كما لو لم تكن الكمية التى ندرسها عشوائية ، بل كمية معلومة محددة ، نعرف قيمتها تماما .

ولكن ، كثيرا جدا ما تقابلنا حالات اخرى فى الاغراض العملية ، عندما يكون من الاهمية بمكان ، تعيين خواص الكمية العشوائية التى لا تستطيع ان تعطينا اياها قيمتها المتوسطة ، بل يجب لذلك ، ان نعرف قانون توزيعها بالتفصيل . والمثال الدقيق على مثل هذه الحالات ، هو عندما يطلب بحث توزيع خطأ القياس . لنفرض ان

$x$ هى قيمة الخطأ . اى اختلاف القيمة التى نحصل عليها بالقياس عن القيمة الحقيقية . وفى حالة انعدام الاخطاء المتكررة ، تكون القيمة المتوسطة لخطأ القياس التى نرمز اليها بـ $\bar{x}$ ، مساوية للصفر .

نفرض ان القياس يجرى بالذات تحت هذا الشرط . والسؤال الان كيف سيتم توزيع الاخطاء؟ الى اى مدى سوف تتكرر قيمة خطأ او آخر ؟

اننا لا نستطيع الاجابة على هذه الاسئلة ، اذا علمنا فقط بان $\bar{x}=0$ . ففى هذه الحالة نعلم فقط انه يمكن ان يحدث خطأ موجب او خطأ سالب ، وان احتمال حدوث كل منهما واحد ، وذلك لان القيمة المتوسطة للخطأ تساوى صفرا . ولكننا لا نعلم شيئا اهم من ذلك ، وهو : هل ستكون غالبية نتائج القياس قريبة من القيمة الحقيقية للكمية قيد القياس ، كى نستطيع الى حد كبير ضمان صحة كل نتيجة من نتائج القياس ، ام ان اكثرية النتائج ستقع على بعد كبير من القيمة الحقيقية؟ من الممكن جدا وقوع هاتين الامكانيتين .

لو قام شخصان بقياس نفس القيمة المتوسطة لخطأ ما $\bar{x}$ ، فانه يمكن ان يعطيا قياسات تختلف درجة دقتها . وقد يعطى احدهما « تشتتا » كبيرا متكررا لنتائج القياسات ، اكبر مما يعطيه الآخر . وهذا يعنى ان الاخطاء التى يعطيها هذا الشخص ، تأخذ فى المتوسط ، قيما كبيرة . وبالتالى ، فان قياساته ستبتعد عن الكمية الحقيقية للمقدار الذى يقيسه ، اكثر من قياسات الآخر . وهذا ممكن رغم ان القيمة المتوسطة لخطأ القياس لدى الشخصين ، واحدة .

لنتناول مثالا آخر . نتصور اننا نختبر محصول نوعين من القمح . وحسب الظروف العشوائية (كمية الامطار ، توزيع السماد ، الاشعاع الشمسى وغيرها ) تختلف كمية محصول المتر المربع ، اختلافا



كبيرا . وتكون عبارة عن كمية عشوائية . نفرض انه تحت نفس الشروط ، يكون متوسط محصول المتر المربع لكل نوع مساويا لـ ٢٤٠ جراما . هل نستطيع ان نحكم على جودة القمح الذى نختبره من معرفة قيمة متوسط المحصول فقط ؟ من الواضح اننا لا نستطيع ، لان المصلحة الاقتصادية الرئيسية ، تتلخص فى اختيار ذلك النوع الذى تتأثر اقل من الآخر ، بالتقلبات الجوية العشوائية ، والعوامل الاخرى. وبكلمة اخر النوع الذى يكون « تشتت » محصوله اقل . وبذلك نرى انه عند اختبار محصول هذا النوع او ذاك من القمح . فان قيمة التغيرات الممكنة فى المحصول ، لا تقل عن قيمته المتوسطة .

## ٢٤ ــ الطرق المختلفة لقياس تشتت الكمية العشوائية

توضح الامثلة التى اوردناها ، وكذلك امثلة مشابهة لها ، انه لكى نتعرف على اهم الصفات العملية للكمية العشوائية ، لا تكفى ابدا معرفة القيمة المتوسطة لها . فان هذه الصفات العملية المهمة للكمية العشوائية تظل غير معلومة ، رغم معرفة القيمة المتوسطة . ولاكتشاف هذه الصفات ، يجب اما معرفة الجدول الكامل لتوزيع هذه الكمية ــ وغالبا ما يكون هذا من الناحية العملية ، صعبا ومعقدا ــ او نحاول وصفها بان نجد الى جانب القيمة المتوسطة لهذه الكمية ، عددا او عددين اخرين من هذا القبيل ، بحيث تعطينا مجموعة هذه الاعداد الصغيرة مجتمعة ، الخواص العملية الكافية لوصف الكمية العشوائية . هذه الخواص ، التى نعتبرها اكثر اهمية من غيرها . وسنرى كيف يمكن تحقيق هذه الامكانية .

فكما توضح لنا الامثلة التى درسناها سابقا ، فان السؤال الاكثر اهمية من الناحية العملية ، هو ما يدور حول ايجاد مدى انحراف

القيم التى تأخذها الكمية العشوائية فى الواقع . عن قيمتها المتوسطة . اى انه الى اى مدى تتبعثر وتتشتت قيم هذه الكمية ، وهل سيتقاوب اكبر عدد من هذه القيم الى القيمة المتوسطة ( وكذلك بعضها الى بعض كثيرا ) ، او على العكس ، سيختلف اكثرها عن القيمة المتوسطة اختلافا كبيرا ( فى هذه الحالة لا بد وان تختلف كثيرا بعض هذه القيم عن بعض ) ويساعد الجدول التقريبى التالى على اخذ صورة عن مدى هذا الاختلاف .

ندرس كميتين عشوائيتين خاضعتين لتوزيع الاحتمالات التالية : القيمة المتوسطة لكل من هاتين الكميتين العشوائيتين المعطيتين بواسطة الجدولين ( $I$ ) . ( $II$ ) تساوى صفرا . فى نفس الوقت تأخذ احدى

(I)

| | |
|---|---|
| −٠,٠١ | +٠,٠١ |
| ٠,٥ | ٠,٥ |

(II)

| | |
|---|---|
| −١٠٠ | +١٠٠ |
| ٠,٥ | ٠,٥ |

هذه الكميات قيما تكون دائما قريبة جدا من الصفر ( وقريبة فيما بينها ) اما الثانية فعلى العكس ، تأخذ قيما بعيدة جدا عن الصفر ( وكذلك بعيدة عن بعض ) . وبالنسبة للكمية الاولى ، تعطينا معرفة قيمتها المتوسطة ، صورة تقريبية لقيمها الممكنة . اما بالنسبة للثانية ، فان قيمتها المتوسطة بعيدة جدا عن قيمها الممكنة ، ولا تعطينا اية صورة لهذه القيم . ولذا ، فاننا نقول ، بان القيم الممكنة فى الحالة الثانية تكون اكثر تشتتا مما هى عليه فى الحالة الاولى . وعلى ذلك ، فان المسألة تنحصر فى ايجاد العدد الذى يستطيع بطريقة معقولة ، ان يعطينا مقياسا لتشتت الكمية العشوائية ، والذى يعطينا ولو صورة تقريبية لما يتوقع من اختلاف قيم الكمية العشوائية عن قيمتها المتوسطة .



ومن الواضح ان $x-\bar{x}$ وهو انحراف الكمية العشوائية $x$ ، يعتبر فى حد ذاته كمية عشوائية . وكذلك القيمة المطلقة $|x-\bar{x}|$ تعتبر كمية عشوائية تحدد مدى الانحراف بصرف النظر عن اشارتها . ومن المرغوب فيه ايجاد ذلك العدد الذى يستطيع ان يصف لنا ولو بالتقريب ، هذا الانحراف العشوائى $|x-\bar{x}|$ ويوضح لنا بالتقريب ، الى اى مدى يمكن ان يكون هذا الانحراف كبيرا . للاجابة على هذا السؤال ، ثمة عدد كبير من الطرق . وتعتبر الطرق الثلاث التالية ، اكثرها فعالية واستخداما فى الحياة العملية .

١ – الانحراف المعيارى :

تستعمل القيمة المتوسطة $\overline{|x-\bar{x}|}$ كأحسن القيم المناسبة لاعطاء صورة تقريبية عن قيمة الكمية العشوائية $|x-\bar{x}|$ وتسمى القيمة المتوسطة لقيمة الانحراف المطلقة بالانحراف المعيارى للكمية .

اذا أعطينا الكمية العشوائية حسب الجدول :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_k$ |
| $p_1$ | $p_2$ | . . . | $p_k$ |

فان جدول الكمية العشوائية $|x-\bar{x}|$ يأخذ الصورة :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\|x_1-\bar{x}\|$ | $\|x_2-\bar{x}\|$ | . . . | $\|x_k-\bar{x}\|$ |
| $p_1$ | $p_2$ | . . . | $p_k$ |

حيث $\bar{x}=\sum_{i=1}^{k} x_i\, p_i$

وبالنسبة للقيمة المتوسطة $M_x$ لانحراف الكمية $x$ نحصل على العلاقة التالية :

$$M_x = \overline{|x - \bar{x}|} = \sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}|\, p_i$$

حيث $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p_i$ كما ذكرنا سابقا .

وبالنسبة للكميات المعطاة فى الجدولين (I) ، (II) تكون $\bar{x}=0$ وبناء على ذلك ، فاننا نجد انه يكون لدينا على التوالى :

$$M_{xI} = 0{,}01,\ M_{xII} = 100$$

وبوجه عام ، فان هذين المثالين بسيطان ، لان القيمة المطلقة للانحراف فى كلتا الحالتين يمكن ان تأخذ قيمة واحدة فقط ، فاقدة بذلك طبيعة الكمية العشوائية .

نحسب كذلك الانحراف المعيارى للكميتين العشوائيتين المعطيتين حسب الجدولين (I') و (II') [صفحة ١٠٣]. وقد رأينا هناك ان القيمتين المتوسطتين لهاتين الكميتين تساويان على التناظر ١ر٢ و ٢ر٢ اى انهما قريبتان من بعضهما . ويكون الانحراف المعيارى للكمية الاولى مساويا لـ :

|١ − ١ر٢|×٤ر٠ + |٢ − ١ر٢|×١ر٠ + |٣ − ١ر٢|×٥ر٠ = ٩ر٠

وللكمية الثانية :

|١ − ٢ر٢|×١ر٠ + |٢ − ٢ر٢|× ٦ر٠ + |٣ − ٢ر٢|×٣ر٠ = ٤٨ر٠

وبذا نرى ان الانحراف المعيارى للكمية الثانية اقل منه بالنسبة للكمية الاولى بمرتين . ومن الواضح ان هذا يعنى عمليا ، انه بالرغم من ان الراميين يحصلان تقريبا على عدد متساو من النقط ، ويمكن



اعتبارهما انطلاقا من هذا المعنى ، ماهرين بنفس الدرجة الا ان لرماية الثانى منهما طبيعة انتظام اكثر مما هى للاول ، فنتائج الثانى اقل تشتتا من نتائج الاول الذى يحصل على نفس العدد من النقط. ولكن رمايته غير منتظمة . فكثيرا ما يعطى نتائج افضل بكثير ونتائج اخرى اسوأ بكثير من النتيجة المتوسطة .

٢ ــ الانحراف التربيعى المعيارى : من الطبيعى ان تقاس الكمية التقريبية للانحراف باستخدام الانحراف المعيارى . ولكن هذا صعب من الناحية العملية ، لان الحسابات والتقديرات التى نجريها على الكميات المطلقة ، كثيرا ما تكون معقدة وفى بعض الاحيان غير ممكنة . لذلك ، يفضل فى التطبيق العملى ، ادخال مقياس آخر بالنسبة لكمية الانحراف .

كما هو الحال بالنسبة للمقدار $\bar{x}=x$ وهوانحراف الكمية العشوائية $x$ عن قيمتها المتوسطة ، فان مربع هذا الانحراف $(x-\bar{x})^2$ عبارة عن كمية عشوائية يأخذ جدولها ، اذا استخدمنا الرموز القديمة ، الصورة التالية :

| $(x_1-\bar{x})^2$ | $(x_2-\bar{x})^2$ | ... | $(x_k-\bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ |

لذلك فالقيمة المتوسطة لهذا المربع تساوى

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

ولعطينا هذه الكمية صورة عن المقدار الذى يساويه بالتقريب ، مربع الانحراف $x-\bar{x}$ . وبأخذ الجذر التربيعى لهذه الكمية ، اى

$$Q_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 p_i},$$

نحصل على كمية تستطيع ان تصف لنا بالتقريب ، مقدار الانحراف نفسه . وتسمى الكمية $Q_x$ بالانحراف التربيعى المعيارى للكمية العشوائية $x$ ، ويسمى مربعها اى الكمية $Q_x^2$ بتشتت $x$ . ومن الواضح ان طبيعة هذا المقياس لكمية الانحراف ، اكثر اصطناعية من الانحراف المعيارى الذى شرحناه سابقا . اذ اننا نسلك فى هذه الحالة طريقة ملتوية ، فنجد اولا القيمة التقريبية لمربع الانحراف . ومن ثم ، بايجاد الجذر التربيعى نعود الى الانحراف نفسه . وعلى الرغم من ذلك ، وكما سنرى فى البند القادم ، فان استخدام الانحرافات التربيعية المعيارية يبسط العمليات الحسابية لدرجة كبيرة . وهذا التبسيط بالذات هو الذى يدفع بالاحصائيين الى استخدام الانحرافات التربيعية المعيارية ى التطبيق العملى ، اكثر من الطرق الاخرى .

مثال : بالنسبة للكميتين العشوائيتين المعطيتين حسب الجدولين ('I) و ('II) فى الصفحة ١٠٣ ، يكون لدينا على التوالى :

$$Q_{xI'}^2 = (1-2,1)^2\cdot 0,4 + (2-2,1)^2\cdot 0,1 + (3-2,1)^2\cdot 0,5 = 0,89$$

و

$$Q_{xII'}^2 = (1-2,2)^2\cdot 0,1 + (2-2,2)^2\cdot 0,6 + (3-2,2)^2\cdot 0{\cdot}3 = 0,36$$

وبالتالى فان :

$$Q_{xI'} = \sqrt{0,89} \approx 0,94,\ Q_{xII'} = 0,6;$$

وبالنسبة لنفس هاتين الكميتين ، كان لدينا سابقا الانحرافان المعياريان وهنا نرى ، ان الانحراف التربيعى المعيارى كالانحراف

$$MxI' = 0,9;\ MxII = 0,48$$

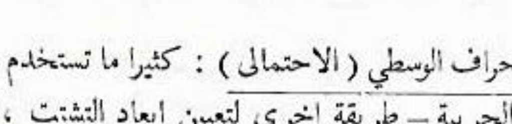


المعيارى . فهو بالنسبة للكمية الاولى اكبر بكثير مما هو بالنسبة للثانية . وبغض النظر عما اذا قسنا التشتت باستخدام الانحراف المعيارى او الانحراف التربيعى المعيارى ، فاننا نتوصل فى كلتا الحالتين الى نفس النتيجة ، وهى ان الكمية الاولى من هاتين الكميتين مشتتة اكثر من الثانية .

وفى كلتا الحالتين ، كان الانحراف التربيعى المعيارى اكبر من الانحراف المعيارى . وببساطة ، يمكن فهم صحة هذه الحقيقة بالنسبة لاية كمية عشوائية .

وفى الواقع ، فحسب القاعدة التى اثبتناها فى الصفحة ١٢٨ لا يمكن ان يكون التشتت $Q_x^2$ وهو القيمة المتوسطة لمربع الكمية $|x-\bar{x}|$ اقل من مربع القيمة المتوسطة $M_x$ للمقدار $|x-\bar{x}|$ ومن $Q_x^2 \geqslant M_x^2$ ينتج ان $Q_x \geqslant M_x$.

٣ — الانحراف الوسطي (الاحتمالى) : كثيرا ما تستخدم — وخصوصا فى المسائل الحربية — طريقة اخرى لتعيين ابعاد التشتت ، وسنشرحها باستخدام مثال عن قذائف المدفعية .




شكل ٩

نفرض ان اطلاق المدافع يتم من النقطة $O$ فى اتجاه $OX$ (شكل ٩) والمسافة $x$ ، وهى بعد نقطة سقوط قذيفة المدفع عن نقطة الاطلاق ، عبارة عن كمية عشوائية ، تبين لنا قيمتها المتوسطة ، موضع « مركز الاصابة » $C$ $(OC=\bar{x})$ ، الذى تتبعثر حوله بشكل او بآخر ، نقط سقوط القذائف كل على حدة . ان المقدار $x-\bar{x}$ وهو انحراف

الكمية العشوائية التى ندرسها ( ابتعاد سقوط القذيفة ) عن قيمتها المتوسطة ، هو فى نفس الوقت انحراف نقطة سقوط القذيفة عن مركز الاصابة $C$. لذلك فان كل تقدير للمقدار $|x-\bar{x}|$ يعطى فى نفس الوقت درجة تشتت وتبعثر القذائف حول المركز $C$ . ولذلك يعتبر هذا التقدير معيارا هاما لنوعية اطلاق القذائف والتصويب .

واذا عيّنا ابتداء من النقطة $C$ متجهين الى اليسار والى اليمين ، مستقيمين قصيرين طول كل منهما $\alpha$ ، فان بعض القذائف فقط ، ستقع داخل هذا المستقيم الذى نحصل عليه بهذه الطريقة ، والذى يكون طوله $2\alpha$ ومنتصفه فى النقطة $C$ ، وبكلمة اخرى ، نقول بان احتمال ان تكون $|x-\bar{x}|>\alpha$ ، سيكون ضئيلا عندما تكون $\alpha$ صغيرة . ولكننا سنأخذ الآن فى زيادة طول المستقيم الذى حصلنا عليه . وذلك بزيادة العدد $\alpha$ ( الذى كنا قد اخذناه بصورة اختيارية ) .

فكلما ازداد طول المستقيم ، كلما زاد عدد القذائف التى ستسقط داخله ، وبالتالى سيزداد بالنسبة لكل قذيفة احتمال سقوطها داخل هذا المستقيم . وعندما تكون $\alpha$ كبيرة ، فعمليا ، ستقع جميع القذائف داخل هذا المستقيم ، وبذلك نرى ، انه بازدياد العدد $\alpha$ ، يزداد احتمال تحقق المتباينة $|x-\bar{x}|<\alpha$ من الصفر الى الواحد الصحيح. ففى البداية عندما تكون $\alpha$ صغيرة ، فعلى الاغلب ستكون $|x-\bar{x}|>\alpha$ اى ان القذيفة تقع خارج المستقيم. وعندما تكون $\alpha$ كبيرة ، فعلى الاغلب ستكون $|x-\bar{x}|<\alpha$ اى ان القذيفة تقع داخل المستقيم. لذلك ففى مكان ما ، عند الانتقال من قيم العدد $\alpha$ الصغيرة الى القيم الاكبر ستكون هناك



قيمة ما $\alpha_0$ من قيم العدد $\alpha$ ، ويكون احتمال سقوط القذيفة داخل المستقيم الذى طوله $2\alpha_0$ او خارجه ، واحدا ، بفرض ان هذا المستقيم مرسوم حول النقطة $C$ . وبكلمة اخرى ، نقول بان احتمال المتباينتين

$$|x-\bar{x}|<\alpha_0$$
$$|x-\bar{x}|>\alpha_0$$

واحد . وهذا يعنى ان احتمال كل منهما يساوى $\frac{1}{2}$ ( اذا ما اصطلحنا على اهمال الاحتمال الضئيل جدا ، بان تتحقق المتساوية $|x-\bar{x}|=\alpha$. وعندما تكون $\alpha<\alpha_0$ ، فالاكثر احتمالا هو تحقق المتباينة الثانية . وعندما تكون $\alpha>\alpha_0$ ، فالاكثر احتمالا هو تحقق المتباينة الاولى . وبذلك نرى انه يوجد عدد محدد واحد هو $\alpha_0$ ويمكن ان تكون الكمية المطلقة للانحراف اكبر منه او اصغر ، ويكون احتمال الحالتين واحدا . ويعتمد كبر $\alpha_0$ على نوعية المدفع الذى تطلق القذائف منه .

وبسهولة ، نرى ان العدد $\alpha_0$ يمكن ان يكون معيارا لتشتت القذائف ، ويشبه بذلك الانحراف المعيارى او الانحراف التربيعى المعيارى . ففى الواقع ، اذا كان العدد $\alpha_0$ صغيرا جدا ، فهذا يعنى ان نصف القذائف التى يطلقها المدفع سيقع فى مساحة صغيرة جدا حول النقطة $c$ . ويشهد هذا على ان التشتت صغير نسبيا . وعلى العكس ، فاذا كان العدد $\alpha_0$ كبيرا ، فاننا اذا احطنا $C$ ولو بمساحة كبيرة ، يجب ان نعتبر ان نصف القذائف سيقع خارج تلك المساحة . ويبين هذا ، ان القذائف تتبعثر حول المركز $C$ بشدة .

ويسمى العدد $\alpha_0$ عادة بالانحراف الوسطى او الانحراف الاحتمالى للكمية $x$ . وبذلك ، فاننا نطلق تسمية الانحراف الوسطى او الانحراف

الاحتمالى للكمية العشوائية $x$ ، على ذلك العدد الذى يمكن أن تكون فيه القيمة المطلقة للانحراف $x-\bar{x}$ ذات الاحتمال الواحد ، اكبر من هذا العدد او اصغر منه . وبالرغم من ان الانحراف الوسطى للمقدار $x$ الذى سنرمز اليه بـ $E_x$ ليس افضل من الانحراف المعيارى $M_x$ لاجراء الحسابات الرياضية واسوأ من الانحراف التربيعى المعيارى $Q_x$ ، الا انه عند دراسة المسائل المتعلقة بالمدفعية ، يستخدم المقدار $E_x$ بالذات لتقدير جميع الانحرافات .

وفيما بعد ، سنعرف لماذا لا يؤدى هذا عمليا ، الى تعقيد المسألة .

## ٢٥ ـ نظرية حول الانحراف التربيعى المعيارى

سنتأكد الان من ان للانحراف التربيعى المعيارى فى الواقع ، صفات خاصة تجعله يفوق اى مميز من مميزات الانحرافات الاخرى ـ مثل الانحراف المعيارى او الانحراف الوسطى ( الاحتمالى ) وغيرهما ـ كما سنتأكد فيما بعد ، ان للمسألة التالية ، أهمية خاصة فى التطبيقات العملية : نفرض ان عندنا الكميات العشوائية $x_1\ x_2, \ldots, x_n$ ذات الانحرافات التربيعية المعيارية $q_1, q_2, \ldots, q_n$

ونفرض ان $X = x_1 + x_2 + \ldots x_n$ .

ونتساءل الان، كيف يمكن ايجاد الانحراف التربيعى المعيارى $q$ للكمية $X$ اذا علمنا قيمة $q_1, q_2, \ldots, q_n$ واذا افترضنا ان الكميات العشوائية $x_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ متنافية فيما بينها ؟

باستعمال نظرية مجموع القيم المتوسطة نجد أن

$$\overline{X} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}$$

وبالتالى ، فان

$$X - \overline{X} = (x_1 - \overline{x_1}) + (x_2 - \overline{x_2}) + \ldots + (x_n - \overline{x_n}),$$



ومنه نحصل على :

$$(X + \overline{X})^2 = \left[ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_i}) \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_i})^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_i - \overline{x_i}) \cdot (x_k - \overline{x_k}) \qquad (1)$$

ونلاحظ الان ان

$$\overline{(X - \overline{X})^2} = Q^2,\ \overline{(x_i - \overline{x_i})^2} = q_i^2 \quad (1 \leqslant i \leqslant n) ;$$

وباستعمال قاعدة جمع القيم المتوسطة نجد أن :

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{(x_i - \overline{x_i})(x_k - \overline{x_k})} \qquad (2)$$

وبما ان الكميات $x_i, x_n$ كما افترضنا ، متنافية فيما بينها ، عندما تكون $i \neq k$ ، فانه ينتج من قاعدة حاصل ضرب القيم المتوسطة للكميات المتنافية مع بعض عندما تكون $i \neq k$ ان :

$$\overline{(x_i - \overline{x_i})(x_k - \overline{x_k})} = \overline{(x_i - \overline{x_i})}\,\overline{(x_k - \overline{x_k})}$$

وهنا فان كل حد من حدود الطرف الايمن يساوى صفرا . ذلك لانه على سبيل المثال :

$$\overline{(x_i - \overline{x_i})} = \overline{x_i} - \overline{x_i} = 0;$$

وعلى ذلك ، فان كل حد على حدة ، من حدود المجموع الاخير فى العلاقة (2) يساوى صفرا . وبذلك نصل الى العلاقة :

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

أى ان تشتت مجموع الكميات العشوائية المتنافية مع بعض يساوى مجموع تشتتاتها .

ونلاحظ انه فى حالة ما اذا كانت الكميات العشوائية متنافية مع بعض ، يمكن ايجاد علاقة لمجموع التشتتات ، كما امكننا سابقا ايجاد علاقة متشابهة لمجموع القيم المتوسطة . وبالنسبة للانحراف التربيعى المعيارى نحصل على :

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$$

ان امكانية التعبير البسيط عن الانحراف التربيعى المعيارى لمجموع ما ، بدلالة الانحراف التربيعى المعيارى لحدوده فى حالة كون هذه الحدود متنافية مع بعض ، تعتبر احدى المميزات الهامة للانحراف التربيعى المعيارى التى تجعلنا نفضله على الانحراف المعيارى والانحراف الاحتمالى او اى انحراف آخر .

مثال ١ ــ اذا فرضنا احتمال ان تكون كل قطعة من قطع الانتاج فى احد المصانع غير جيدة يساوى $p$ ، فان القيمة المتوسطة لعدد قطع الانتاج غير الجيدة من مجموع الانتاج كله وعدده $n$ (كما رأينا على الصفحة ١١٧ ) تساوى $np$ . ولكى نتصور مدى اختلاف العدد الحقيقى للقطع غير الجيدة عن قيمته المتوسطة $np$ . نجد الانحراف التربيعى المعيارى لعدد القطع غير الجيدة . واسهل طريقة لايجاد هذا الانحراف ، هى استعمال العلاقة ( 3 ) .

ويمكن اعتبار ان عدد القطع غير الجيدة ، هو مجموع اعداد القطع غير الجيدة اثناء انتاج كل قطعة . ( وذلك كما فعلنا فى المثال المشابه على الصفحة ١١٧ ) وحيث ان هذه الاعداد تعتبر كميات



عشوائية مستقلة عن بعضها ، فان من قاعدة جمع التشتتات ، يمكن استعمال العلاقة ( 3 ) لايجاد الانحراف التربيعى المعيارى $Q$ للعدد الكلى للقطع غير الجيدة مع العلم بان $q_1, q_2, \ldots, q_n$ فى هذه العلاقة ، ما هى الا الانحرافات التربيعية المعيارية لعدد القطع غير الجيدة اثناء انتاج كل قطعة على حدة . ولكن عدد القطع غير الجيدة اثناء انتاج القطعة $i$ يمكن تحديده بالجدول التالى :

| | |
|---|---|
| 1 | 0 |
| p | 1 − p |

وعلى ذلك فان $\bar{x}_i = p$ و

$$q_i^2 = \overline{(x_i - \bar{x}_i)^2} = (1-p)^2 p + p^2 (1-p) = p(1-p);$$

وبالتالى فان

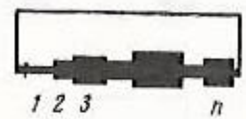
$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2} = \sqrt{np(1-p)}$$

وهو الحل المطلوب للمسألة .

وبمقارنة القيمة المتوسطة لعدد قطع الانتاج غير الجيدة $np$ بالانحراف التربيعى المعيارى $\sqrt{np(1-p)}$ ؛ نجد انه اذا كانت $n$ كبيرة ، يكون الاخير اصغر بكثير من الاول ويكون جزءا صغيرا منه فقط .

واذا كان العدد $n = 60000$ والاحتمال $p = 0{,}04$ ، فان القيمة المتوسطة لعدد القطع غير الجيدة تساوى ٢٤٠٠ والانحراف التربيعى المعيارى $Q = \sqrt{60000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} = 48$ ، أى ان العدد الحقيقى لقطع الانتاج غير الجيدة يختلف عن قيمته المتوسطة تقريبا بمقدار ٥٪ .

مثال ٢ – نفرض انه تجرى احدى عمليات تجميع آلة ما تتكون من $n$ من القطع ، بحيث توصل كل قطعة بالاخرى فى اتجاه محور ما ، ثم تجمعها جميعا قطعة كبيرة تصل كلا الطرفين ( شكل ١٠ ) . وقد يختلف طول كل قطعة عن المقياس المطلوب . ولذا فانه يمكن




شكل ١٠

اعتبار هذا الطول كمية عشوائية . لنفرض ان هذه الكميات العشوائية مستقلة عن بعض . واذا كانت كل قيمة من القيم المتوسطة لاطوال هذه القطع وكذلك تشتتاتها تساوى على التوالى $a_1, a_2, ..., a_n$ ، فان القيمة المتوسطة والتشتت فى طول سلسلة متكونة من $n$ قطعة ، يساويان

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$q = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} q_k^2}$$

وبالتحديد ، اذا كانت $a_1 = a_2 = ... = a_9 = 10\ cm$ بحيث $n = 9$ و $q_1 = q_2 = ... = q_9 = 0{,}2\ cm$ فان $a = 90\ cm$ و $q = \sqrt{9\ (0{,}2)^2} = 0{,}6\ cm$ .

ومن هنا نرى انه اذا اختلف طول كل قطعة فى المتوسط ، عن القيمة المتوسطة لطولها بمقدار ٢٪ ، فان طول السلسلة المتكونة من هذه القطع ، سيختلف عن قيمته المتوسطة بالتقريب بمقدار $\frac{٢}{٣}$٪ فقط .



ولهذا العامل – وهو التناقص النسبى فى الخطأ فى مجموع الكميات العشوائية – دور كبير جدا اثناء تجميع الآلات الدقيقة . ففى الواقع ، اذا لم يكن هناك تعويض متبادل لانحرافات ابعاد بعض القطع عن الابعاد الطبيعية ، فانه يحدث اثناء عملية تجميع الآلات ان تكون القطعة المجمعة اصغر من مجموع كافة القطع التى تدخل فى تركيبها أو بالعكس ، يكون هناك فراغ كبير بينها وبين القطع الاخرى . وفى كلتا الحالتين ، تحدث خسارة واضحة . والتغلب على هذه الخسارة عن طريق انقاص الاختلاف المسموح به فى الابعاد الحقيقية للقطعة عن الابعاد المعينة ، يعتبر غير مجد . ذلك لان الزيادة الصغيرة نسبيا فى دقة تصنيع القطع تزيد من تكاليف انتاجها بشكل ملحوظ * .

مثال ٣ – نفرض انه تجرى $n$ من عمليات القياس تحت ظروف ثابتة . وتعطينا عمليات القياس على العموم نتائج مختلفة ، وذلك لاسباب كثيرة ( وضع الجهاز ، موضع المشاهد ، التذبذب فى حالة الهواء ووجود اتربة فيه وغيرها ) ولذلك تعتبر نتائج القياس كميات عشوائية . سنرمز الى نتائج القياس بـ $x_1, x_2, ..., x_n$ ، وذلك بوضع رقم عملية القياس تحت الرمز $x$ ( كعلامة ) . ان القيمة المتوسطة لكل من هذه الكميات العشوائية واحدة وتساوى $\bar{x}$ . وكذلك يمكن بالطبع ، اعتبار ان جميع الانحرافات التربيعية المعيارية $q$ متساوية ، وذلك لان عمليات القياس تجرى تحت ظروف ثابتة لا تتغير . واخيرا ، نعتبر الكميات $x_1, x_2, ......, x_n$ كالمعتاد مستقلة عن بعض .

---

* فى السنوات الاخيرة توصلت الابحاث التكنيكية الى ضرورة وضع نظرية الافتراضات التى تعتمد اساسا على نظرية الاحتمالات . وهذه النظرية تتطور الان تطورا ملحوظا .

ندرس الان المتوسط الحسابى

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

لنتائج $n$ عملية ، وهو كمية عشوائية . ولنجد قيمته المتوسطة وانحرافه التربيعى المعيارى . وباستعمال قاعدة الجمع ، نجد ان

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\overline{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} = \frac{1}{n}(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}) = \frac{1}{n}(n\overline{x}) = \overline{x}$$

اى ان القيمة المتوسطة ، كما كان هذا عمليا واضحا مسبقا ، واحدة بالنسبة لكل عملية قياس على حدة . وكذلك الانحراف التربيعى المعيارى للمجموع $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ يساوى ، حسب قاعده جمع التشتتات (3) :

$$Q = \sqrt{nq^2} = q\sqrt{n}$$

وبذلك يكون الانحراف التربيعى المعيارى للكمية $\xi$ التى تساوى $\frac{1}{n}$ من هذا المجموع مساويا لـ :

$$\frac{Q}{n} = \frac{q}{\sqrt{n}}$$

وهنا نصل الى نتيجة هامة جدا . هى :

**للمتوسط الحسابى لعدد من الكميات العشوائية المستقلة عن بعضها والمتساوية التوزيع يكون :**

**أ ــ القيمة المتوسطة هى واحدة بالنسبة لكل كمية من الكميات العشوائية الداخلة فى المتوسط الحسابى .**

**ب ــ الانحراف التربيعى المعيارى يقل عن كل كمية عشوائية داخلة فى المتوسط الحسابى بمقدار $\sqrt{n}$ مرة .**

واذا كانت القيمة المتوسطة للكمية قيد القياس $x$ تساوى ٢٠٠ متر ، والانحراف التربيعى المعيارى $q$ يساوى ٥ امتار ، فان القيمة



المتوسطة للمتوسط الحسابى $\xi$ لنتائج مئة عملية قياس ، تساوى ٢٠٠ متر ايضا. ولكن الانحراف التربيعى المعيارى يقل بمقدار $\sqrt{١٠٠} = ١٠$ مرات عن الانحراف التربيعى المعيارى لكل نتيجة قياس على حدة، اى يساوى ( $\frac{q}{10} = 0{,}5m$ ) فقط .

وبناء على ذلك ، فان هناك اساسا لان نتوقع ان يكون المتوسط الحسابى لنتائج مئة عملية قياس حقيقية ، اقرب كثيرا الى القيمة المتوسطة ٢٠٠ متر ، مما هو عليه بالنسبة لنتيجة هذه العملية او تلك من عمليات القياس التى تجرى كل منها على حدة . اى ان التشتت فى المتوسط الحسابى لعدد كبير من الكميات العشوائية المستقلة عن بعض ، اقل بكثير من تشتت اى من هذه الكميات على حدة .

الباب الحادى عشر

# قانون الاعداد الكبيرة

## ٢٦ ـ متباينة تشيبيتشيف

لقد تحدثنا عدة مرات عن ان بمعلومية اى من الانحرافات المعيارية للكمية العشوائية (الانحراف التربيعى المعيارى مثلا) يمكن الحكم بالتقريب على مدى الاختلاف بين القيم الحقيقية التى تأخذها هذه الكمية العشوائية وبين قيمتها المتوسطة المتوقعة . ولكن هذه الملاحظة بحد ذاتها ، لا تحتوى على اى تقدير كمى ولا تعطينا اية امكانية لحساب احتمالات الانحرافات الكبيرة ولو بالتقريب . ويمكن الاجابة على هذه الاسئلة بالطريقة التالية التى استنتجها تشيبيتشيف لاول مرة. نبدأ باستعمال علاقة تشتت الكمية العشوائية (راجع الصفحتين ١٢٧ و ١٢٨)

$$Q_x^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 p_i$$

لنفرض ان $\alpha$ مقدار موجب ما . فاذا ما اهملنا من المجموع السابق جميع الحدود التى تحقق المتباينة $|x_i - \overline{x}| \leqslant \alpha$ واخذنا الحدود التى تحقق المتباينة $|x_i - \overline{x}| > \alpha$
فنتيجة لذلك يمكن فقط ان يقل المجموع :

$$Q_x^2 \geqslant \sum_{|x_i - \overline{x}| > \alpha} (x_i - \overline{x})^2 p_i$$



ويقل هذا المجموع اكثر ، اذا ما وضعنا بدلا من المقدار $(x_i - \overline{x})^2$ فى كل حد ، المقدار الاصغر منه $\alpha^2$

$$Q_x^2 \geqslant \alpha^2 \sum_{|x_i - \overline{x}| > \alpha} p_i$$

ان المجموع الموجود فى الطرف الايمن عبارة عن مجموع احتمالات ان تأخذ الكمية العشوائية $x$ القيم $x_i$ التى تختلف عن القيمة المتوسطة $\overline{x}$ سواء اكبر منها او اصغر ، بمقدار اكبر من $\alpha$ .

ومن قاعدة الجمع نرى ان هذا المجموع يساوى احتمال ان تأخذ الكمية العشوائية $x$ اية قيمة من هذه القيم ، او بمعنى آخر ، فان هذا المجموع يساوى $P(|x - \overline{x}| > \alpha)$ وهو احتمال ان يكون الاختلاف الحقيقى الذى نحصل عليه ، اكبر من $\alpha$ . وعلى ذلك ، نجد ان

$$P(|x - \overline{x}| > \alpha) \leqslant \frac{Q_x^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

وتسمح هذه المتباينة ، بتقدير احتمال الاختلافات الاكبر من مقدار معين $\alpha$ ، اذا علم الانحراف التربيعى المعيارى $Q_x$ فقط . وفى الحقيقة غالبا ما تعطينا متباينة تشيبيتشيف تقديرا بعيدا جدا عن الدقة . ولكنها فى بعض الاحيان ، تفيد فى الحصول على بعض النتائج العملية مباشرة ، وذلك بالاضافة الى اهميتها النظرية القصوى .

فى نهاية البند السابق استعرضنا المثال التالى :

القيمة المتوسطة لنتيجة القياس تساوى ٢٠٠ متر . الانحراف التربيعى المعيارى يساوى ٥ أمتار ، وتحت هذه الشروط ، لا يمكن اهمال احتمال الحصول على اختلاف حقيقى اكبر من ثلاثة امتار (يمكن ان نظن ان هذا الاحتمال اكبر من نصف . ويمكن بالطبع

ايجاد القيمة الدقيقة لهذا الاحتمال اذا علمنا قانون توزيع نتائج القياس بالتفصيل) . ولكننا وجدنا انه بالنسبة للمتوسط الحسابى لمئة نتيجة قياس ، يكون الانحراف التربيعى المعيارى مساويا ٥ر٠ متر . ولذلك فانه باستعمال المتباينة (1) نجد ان :

$$P(|\xi - 200| > 3) \leqslant \frac{(0,5)^2}{3^2} = \frac{1}{36} \approx 0,03$$

وعلى ذلك ، فبالنسبة للمتوسط الحسابى لمئة نتيجة قياس يكون احتمال الحصول على اختلاف اكبر من ثلاثة امتار ضئيلا جدا (يكون هذا الاحتمال فى الواقع اصغر بكثير من الحد الذى حصلنا عليه ، ولذلك فاننا نستطيع عمليا ، اهمال امكانية الحصول على مثل هذا الاختلاف). وفى المثال (1) على الصفحتين (١٣٤ و١٣٥) حصلنا بالنسبة لعدد قطع الانتاج الرديئة ، عند اختبار ٦٠٠٠٠ قطعة ، على القيمة المتوسطة وكانت تساوى ٢٤٠٠ والانحراف التربيعى المعيارى يساوى ٤٨ . اذا اردنا ايجاد احتمال ان يكون العدد الحقيقى لقطع الانتاج الرديئة واقعا بين ٢٣٠٠ و ٢٥٠٠ ، اى احتمال ان يكون $|m - 2400| \leqslant 100$ فان متباينة تشيبيتشيف تعطينا

$$P\{|m - 2400| \leqslant 100\} = 1 - P\{|m - 2400| > 100\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{48^2}{50^2} \approx 0,77$$

غير ان هذا الاحتمال يكون فى الواقع اكبر بكثير من هذه القيمة التى حصلنا عليها .

## ٢٧ - قانون الاعداد الكبيرة

نفرض ان عندنا $n$ من الكميات العشوائية المستقلة عن بعضها البعض $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بحيث ان قيمتها المتوسطة جميعا ، متساوية ،




وهى $a$ . وكذلك الانحراف التربيعى المعيارى $q$ لها جميعا واحد . وكما رأينا على الصفحة (١٣٨) ، فان القيمة المتوسطة للمتوسط الحسابى لهذه الكميات $\xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ تساوى $a$ والانحراف التربيعى المعيارى يساوى $\frac{q}{\sqrt{n}}$

ولذلك فان لاى مقدار موجب $\alpha$ تعطينا متباينة تشيبيتشيف

$$P(|\xi - a| > \alpha) \leqslant \frac{q^2}{\alpha^2 n} \quad (2)$$

لنفرض على سبيل المثال اننا نتحدث عن المتوسط الحسابى لنتائج $n$ عملية من عمليات قياس كمية معينة . ونفرض كما سبق ، ان $q = 5\ m$ ، $a = 200\ m$ . ولذلك ، فاننا نحصل على

$$P(|\xi - 200| > \alpha) \leqslant \frac{25}{\alpha^2 n}$$

ويمكننا اختيار $\alpha$ بحيث تكون صغيرة مثلا $\alpha = 0,5\ m$ . وبذلك يكون

$$P(|\xi - 200| > 0,5) \leqslant \frac{100}{n}$$

واذا كان عدد مرات القياس $n$ كبيرا جدا ، فان الطرف الايمن لهذه المتباينة يصغر بدرجة كافية. وعندما تكون $n = 10000$ مثلا فان الطرف الايمن يساوى ٠١ر٠ وتكون بالنسبة للمتوسط الحسابى لـ ١٠٠٠٠ نتيجة قياس :

$$P(|\xi - 200| > 0,5) \leqslant 0,01$$

واذا ما اتفقنا على اهمال امكانية وقوع الحوادث ذات الاحتمالات الضئيلة كهذه ، فانه يمكن القول بانه اذا اجرينا ١٠٠٠٠ عملية قياس ، فسيختلف متوسطها الحسابى عن ٢٠٠ متر سواء بالزيادة او بالنقصان ، بمقدار لا يزيد عن ٥٠ سنتيمترا .

اما اذا اردنا الحصول على اختلاف اقل — ١٠ سنتيمترات مثلا — فانه يجب وضع $a = 0{,}1$ وبذلك نحصل على

$$P(|\xi - 200| > 0{,}1) \leqslant \frac{25}{0{,}01n} = \frac{2500}{n}$$

واذا اردنا ان يكون الطرف الايمن لهذه المتباينة اصغر من ١٠ر٠ فانه يجب الا نأخذ عدد مرات القياس مساويا ١٠٠٠٠ (اذ ان العدد لا يكفى الآن) بل نأخذ ٢٥٠٠٠٠ . وعلى الارجح ، يمكن تصغير الطرف الايمن فى المتباينة (2) كما نحب ، مهما كانت قيمة $a$ صغيرة ، ويكفى لذلك اخذ $n$ كبيرة بدرجة كافية ، وبناء على ذلك ، عندما تكون $n$ كبيرة بدرجة كافية يمكن اعتبار المتباينة العكسية $|\xi - a| \leqslant a$ مؤكدة الى حد بعيد.

**اذا كانت الكميات العشوائية $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مستقلة عن بعض ، وكانت قيمتها المتوسطة متساوية وكذلك انحرافاتها التربيعية المعيارية متساوية يكون احتمال الكمية**

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

**عندما تكون n كبيرة كبرا كافيا ، قريبا من الواحد الصحيح** قربا كافيا . (اى عمليا ، تكون الحادثة مؤكدة) ويختلف اختلافا بسيطا عن المقدار $a$ .

وهذه هى ابسط الحالات الخاصة لاهم النظريات الاساسية فى نظرية الاحتمالات ، وتسمى بقانون الاعداد الكبيرة وظهرت هذه النظرية فى منتصف القرن الماضى ، وقد اكتشفها عالم الرياضيات الروسى الكبير تشيبيتشيف . ويتلخص محتوى هذا القانون الهام فى التالى : مع ان بعض الكميات العشوائية المنفردة « كما نعلم » ، يمكن ان تأخذ فى الغالب ، قيما بعيدة عن قيمتها المتوسطة (لها تشتت كبير) الا ان المتوسط الحسابى لعدد كبير من هذه الكميات العشوائية يتشتت تشتتا صغيرا جدا . وباحتمال كبير للغاية ، يأخذ هذا المتوسط قيما قريبة جدا من قيمته المتوسطة . وهذا بالطبع ، يحدث لانه عندما نأخذ المتوسط الحسابى ، تختصر الاختلافات العشوائية الموجبة مع السالبة مما يترتب عنه ان يكون مجموع الاختلافات فى اغلب الأحيان صغيرا .

وتتلخص النتيجة الهامة لنظرية تشيبيتشيف التى اثبتناها الان ، والتى كثيرا ما تقابلنا فى الحياة العملية فى التالى : يمكن الحكم على نوعية كمية كبيرة من مادة متجانسة ، بواسطة عدد صغير نوعا ما من العينات * . فاذا اردنا الحكم على نوعية القطن فى بالة من البالات مثلا نأخذ عشوائيا ، عينات صغيرة من اماكن مختلفة من البالة . وكذلك الحال اذا اردنا الحكم على نوعية كومة كبيرة من القمح ، نأخذ عشوائيا ، عينات صغيرة من اماكن مختلفة من هذه الكومة *

وتعتبر طريقة الاختبار التى تعتمد على هذا الاختيار العشوائى ، على درجة كبيرة من الدقة . ذلك لان كمية القمح مثلا ، المأخوذة كعينة ، ولو كانت ضئيلة بالنسبة لكومة القمح كلها ، غير انها فى حد ذاتها كبيرة . وتسمح تبعا لقانون الاعداد الكبيرة بالحكم على وزن حبة القمح فى المتوسط بدقة كافية . ومنه يمكن الحكم على نوعية كومة القمح كلها . وبنفس الطريقة ، نحكم على القطن الموجود فى بالة وزنها حوالى ٣٢٠ كجم بواسطة عينة مكونة من عدة مئات من الالياف ، لا يزيد وزنها عن جزء من عشرة من الجرام .

* العينة المأخوذة لا تزيد عن ١٠٠ او ٢٠٠ جرام . اما الكومة كلها فيصل وزنها الى عشرات واحيانا الى مئات الاطنان من القمح .

## ٢٨ - اثبات قانون الاعداد الكبيرة

لقد درسنا حتى الان حالة خاصة فقط تكون فيها الكميات العشوائية $x_1, x_2, \ldots$ التى لها نفس القيمة المتوسطة والانحراف التربيعى المعيارى. ولكن قانون الاعداد الكبيرة يطبق ايضا فى الحالات الاعم . وسنقوم الان بدراسة الحالة التى تكون فيها القيم المتوسطة للكميات العشوائية $x_1, x_2, \ldots$ اية اعداد نريدها ( سنرمز اليها على التوالى بـ $a_1, a_2, \ldots$) وفى الحالة العامة ، تكون هذه الاعداد مختلفة فيما بينها ، وعندئذ ، تكون القيمة المتوسطة للكمية

$$\xi = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

هى الكمية :

$$A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

وباستعمال متباينة تشيبيتشيف ( 1 ) نجد ان :

$$P(|\xi - A| > \alpha) \leqslant \frac{Q_\xi^2}{\alpha^2} \qquad (3)$$

حيث $\alpha$ ـ اى مقدار موجب .

ونرى ان الاثبات يعتمد على تقدير قيمة المقدار $Q_\xi^2$ ويمكن تقدير هذا المقدار بنفس الطريقة البسيطة التى استعملناها فى الحالة الخاصة التى درسناها . $Q_\xi^2$ ، هو تشتت الكمية $\xi$ التى تساوى مجموع عدد $n$ من الكميات العشوائية المستقلة عن بعض ، مقسوما على عددها $n$ ( وقد احتفظنا هنا بشرط كون الكميات العشوائية مستقلة عن بعض ) . ومن قاعدة جمع التشتت ، نجد ان

$$Q_\xi^2 = \frac{1}{n^2}(q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2)$$



حيث ان $q_1, q_2, \ldots$ تعنى على التوالى ، الانحراف التربيعى المعيارى للكميات $x_1, x_2, \ldots$. وسنعتبر الان ان هذه الانحرافات التربيعية المعيارية عامة ، مختلفة فيما بينها ، ولكننا سنفترض انه مهما كان عدد الكميات العشوائية كبيرا ، ( اى مهما كان العدد $n$ كبيرا ) فان الانحراف التربيعى المعيارى لجميع هذه الكميات يكون اقل من مقدار موجب معين ، ودائما ما يتحقق هذا الشرط عمليا . حيث اننا نقوم بجمع كميات عشوائية من نوع واحد . ولا تختلف درجة تشتت الكميات المختلفة عن بعض الا قليلا .

وهكذا نفرض ان $q_i < b$ حيث $(i = 1, 2, \ldots)$

وتعطينا العلاقة الاخيرة تبعا لذلك ما يلى :

$$Q_\xi^2 < \frac{1}{n^2} n b^2 = \frac{b^2}{n}$$

وتبعا لذلك ، نحصل من المتباينة ( 3 ) نهائيا على :

$$P(|\xi - A| > \alpha) \leqslant \frac{b^2}{n\alpha^2}$$

ومهما كانت قيمة $\alpha$ صغيرة ، فان عدد الكميات العشوائية عندما يكون كبيرا ، يمكن جعل الطرف الأيمن لهذه المتباينة صغيرا صغرا كافيا . وبذلك نكون قد اثبتنا قانون الاعداد الكبيرة فى الحالة العامة التى بحثناها .

**وبناء على ذلك ، فانه اذا كانت الكميات $x_1, x_2, \ldots$ مستقلة عن بعض ، وبقى الانحراف التربيعى المعيارى لكل منها اقل من مقدار معين موجب ، وكذلك اذا كانت $n$ كبيرة كبرا كافيا فبالنسبة للمتوسط الحسابى .**

$$\xi = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

**يمكننا ان نتوقع باحتمال قريب جدا من الواحد الصحيح ، ان يكون الاختلاف بقيمته المطلقة صغيرا صغرا كافيا . وهذا هو قانون الاعداد الكبيرة الذى اكتشفه تشيبيتشيف .**

والان ، من المهم ان نلفت الانتباه الى عامل هام . لنفرض اننا نقوم بقياس كمية ما $a$ . اذا ما كررنا عملية القياس تحت نفس الظروف ، فاننا نحصل على نتائج عديدة مختلفة تماما عن بعض $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ويمكن اخذ المتوسط الحسابى لهذه القيم كقيمة مقربة للكمية

$$a \sim \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

وهنا نتساءل : هل يمكن الحصول على قيمة دقيقة دقة كافية للكمية $a$ اذا ما اجرينا عددا كبيرا من عمليات القياس ؟ هذا يحدث فعلا اذا انعدمت الاخطاء المتكررة فى القياس ، اى اذا كان $\overline{x_k} = a$ (عندما تكون $k = 1, 2, \ldots, n$) واذا انعدم عدم التحديد فى نفس هذه القيم . او بطريقة اخرى اذا قرأنا على الجهاز قيم القياس التى تحدث فى الواقع ، واذا كان الجهاز مصمما بحيث لا يستطيع ان يعطينا دقة فى الحساب اكبر من قيمة ما $\delta$ ، وبما ان عرض خطوط تقسيم المسطرة المدرجة التى تعطينا الحسابات ، يساوى $\delta$ مثلا ، فانه من الواضح اننا لن نستطيع الحصول على دقة اعلى من $\pm\delta$ . ومن الواضح ان المتوسط الحسابى فى هذه الحالة سيحتوى على الخطأ $\delta$ كما هو الحال بالنسبة لكل من $x_k$ .

وتكشف لنا هذه الملاحظة ، ان الجهاز اذا اعطانا نتائج القياس وفيها بعض عدم التحديد $\delta$ ، فان محاولة الحصول على قيمة $a$ بدقة كبيرة باستعمال قانون الاعداد الكبيرة ، تعتبر تضييعا للوقت . ونفس العمليات الحسابية التى نجريها فى هذه الحالة ، تعتبر ملهاة حسابية لا جدوى منها .



الباب الثانى عشر

# قوانين التوزيع المعتدلة

## ٢٩ ـ الصورة العامة للمسألة

لقد علمنا ان عددا كبيرا من الظواهر الطبيعية وكذلك العمليات الانتاجية تعتمد اثناء حدوثها على هذه الكمية العشوائية او تلك . وقبل ان تتم الظاهرة او العملية التى ندرسها ، فان ما نستطيع ان نعلمه عن هذه العمليات ، تكون غالبا قوانين توزيعها فقط ، اى قوائم قيمها الممكنة واحتمال كل منها . واذا اخذت الكمية مجموعة لانهائية من القيم المختلفة (مدى طيران القذيفة ، قيمة الخطأ فى القياس ، وهكذا ) فانه يفضل توضيح احتمال ان تقع قيمة هذه الكمية فى فترة معينة ، لا احتمال كل قيمة منفردة ( مثلا احتمال ان يقع الخطأ فى القياس فى الفترة من ـ ١ ملم الى + ١ ملم او من ١ر٠ ملم الى ٢٥ر٠ ملم وهكذا ). وهذا لا يغير شيئا فى واقع الامر. اذ انه لكى نتعرف على الكمية العشوائية او لكى نستطيع الحكم عليها فى حدود امكانياتنا ، لا بد وان يكون عندنا تصور دقيق لقانون توزيعها .

واذا حاولنا التعرف على قانون توزيع الكميات العشوائية التى تقابلنا ، وذلك برفضنا اى تخمين للصفات العامة لهذه الكميات ، بل حاولنا عن طريق التجربة وبدون اية فروض مسبقة ، ايجاد كافة خواص قانون توزيع كل كمية عشوائية على حدة ، فاننا نكون قد

وضعنا انفسنا امام مسألة يستحيل حلها عمليا . ففى كل حالة جديدة نضطر للقيام بعدد كبير من التجارب لكى نحدد ولو الخواص الهامة لقانون التوزيع الجديد .

ولذلك فقد حاول العلماء من قديم الزمان ايجاد صور عامة لقوانين التوزيع يمكن بمعرفتها تخمين او توقع ولو مجموعة كبيرة من الكميات العشوائية التى تقابلنا ، ان لم تكن كلها . وقد حددت مثل هذه القوانين نظريا من زمن بعيد واكدت التجربة صحتها . ومن الواضح انه من المفيد جدا ، بالاعتماد على التحليل النظرى وعلى نتائج التجارب السابقة ، تخمين صورة توزيع الكمية العشوائية الجديدة التى تقابلنا . واذا اتضحت صحة التخمين فانه يلزم عدد قليل جدا من التجارب او المشاهدات ، لكى نحدد كافة خواص قانون التوزيع التى تلزمنا .

وقد اوضح التحليل النظرى انه فى حالات كثيرة تقابلنا عمليا ، يمكن توقع صورة محددة تماما لقانون التوزيع . وتسمى هذه القوانين بقوانين التوزيعات المعتدلة . وسنتحدث عن هذه القوانين فى هذا الباب باختصار ، مهملين جميع الاثباتات وذلك لصعوبتها .

ان من بين الكميات العشوائية التى تقابلنا فى التطبيق العملى . هناك كميات تحمل طابع « الخطأ العفوى » او « الخطأ العشوائى » او على الاقل يمكن ان تؤول الى هذه « الاخطاء» . لنفرض على سبيل المثال اننا ندرس بعد المسافة التى تقطعها طلقة ما اطلقت من بندقية ما . بالطبع نفترض انه يوجد معدل او متوسط للبعد $x_0$ وهو البعد الذى نحدد عليه جهاز القياس . والفرق $x - x_0$ ما هو الا الخطأ فى البعد . وبذلك تؤول دراسة الكمية العشوائية $x$ مباشرة وكلية ، الى دراسة الخطأ العشوائى $x - x_0$.



ولكن تتغير قيمة هذا الخطأ من طلقة الى اخرى ويعتمد هذا على اسباب كثيرة مستقلة عن بعضها البعض : اهتزاز عشوائى فى ماسورة البندقية ، اختلاف ( واو بسيط ) لا يمكن تجنبه فى شكل ووزن الطلقات ، التغيّرات العشوائية فى حالة الجو التى تؤدى الى التغير فى مقاومة الهواء ، خطأ عشوائى فى التصويب (اذا اجرى التصويب كل مرة قبل كل عملية اطلاق او قبل كل مجموعة غير كبيرة من عمليات الاطلاق ) . .

ان كل هذه الاسباب وكثير غيرها ، تؤدى الى الخطأ فى المسافة التى تقطعها الطلقة . وكل هذه الاخطاء الجزئية تكون كميات عشوائية مستقلة عن بعض ، بحيث ان تأثير كل منها يكون جزءا صغيرا فقط من المجموع الكلى لها ، والخطأ النهائى الذى ندرسه $x - x_0$ ، ما هو الا المجموع الكلى لتأثيرات هذه الاخطاء العشوائية التى تحدث لاسباب منفردة . وعلى ذلك ، فان الكمية العشوائية التى تهمنا ، ما هى الا مجموع عدد كبير من الكميات العشوائية المستقلة عن بعضها . ومن الواضح انه يمكن تحليل اكثرية الاخطاء العشوائية التى تقابلنا عمليا بنفس الطريقة .

وعلى ذلك ، فان التحليل النظرى الذى لا نستطيع ايراده هنا ، يوضح ان قانون توزيع الكمية العشوائية التى تساوى مجموع عدد كبير من الكميات العشوائية المستقلة عن بعضها البعض ، لا بد وان يتم مهما كانت طبيعة مكونات هذا المجموع ، على شرط ان يكون كل من تلك المكونات صغيرا اذا ما قورن بالمجموع الكلى ، وقريبا من قانون من نوع محدد تماما * . وهذا النوع هو نوع

---

* راجع الخاتمة .

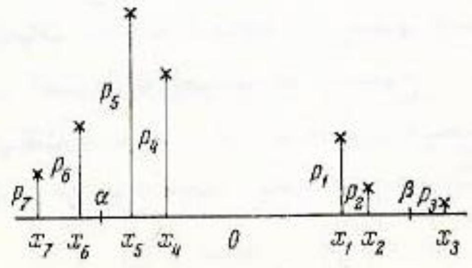
قوانين التوزيع المعتد . وعلى ذلك ، فاننا نستطيع افتراض ان الغالبية العظمى من الكميات العشوائية التى تقابلنا عمليا ( جميع الاخطاء التى تتكون من مجموع عدد كبير من الاخطاء العشوائية المستقلة عن بعضها البعض ) موزعة تقريبا حسب قوانين التوزيع المعتدلة . والان ، يجب ان نتعرف على الخواص الاساسية لهذه القوانين .

## ٣٠ ـ مفهوم منحنى التوزيع

فى البند ١٥ ، تطرقنا الى توضيح قانون التوزيع باستعمال الرسم البيانى ، وهذه وسيلة مفيدة جدا . اذ انه بمجرد النظر ، وبدون استعمال الجدول ، يمكن التعرف على الخواص الهامة لقانون التوزيع الذى ندرسه .

وتتلخص هذه الطريقة فى التالى :

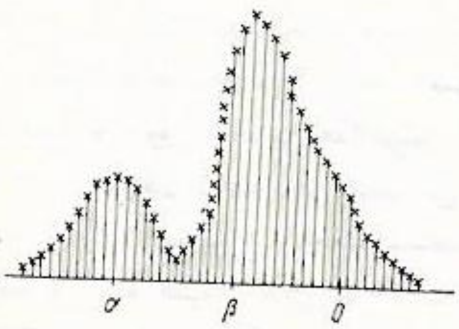
نعين على خط افقى ، القيم المختلفة التى تاخذها الكمية العشوائية ، مبتدئين من نقطة اصل معينة $O$ ، بحيث تكون القيم الموجبة على يمينها والسالبة على يسارها ( شكل ١١ ) . نرسم من كل نقطة مناظرة لكل قيمة ممكنة ، عمودا الى اعلى يمثل احتمال هذه القيمة . ونأخذ مقياس الرسم فى الناحيتين ، بحيث يكون الرسم البيانى واضحا




شكل ١١



ومرئيا . وبالقاء نظرة عابرة على الشكل ١١ ، يمكن التأكد من ان الكمية العشوائية تأخذ اكبر قيمة محتملة لها عند $x_5$ ( سالبة ) . وكلما ابتعدت القيم الممكنة لهذه الكمية عن $x_5$ ، كلما قل احتمالها ( بسرعة جدا ) وان احتمال ان تأخذ الكمية العشوائية قيما تقع فى فترة ما ( $\beta$ ، $\alpha$ ) يساوى حسب قانون الجمع ، مجموع احتمالات جميع القيم الممكنة التى تقع داخل هذه الفترة . ويساوى من الناحية الهندسية مجموع اطوال الاعمدة المرسومة داخل هذه الفترة . فى الشكل ١١ لدينا : $P(\alpha < x < \beta) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5$ واذا كان عدد القيم الممكنة التى تأخذها الكمية العشوائية كبيرا جدا ، كما يحدث دائما من الناحية العملية ، فلكى لا يتسع الرسم بشكل كبير فى الاتجاه الافقى ، يؤخذ مقياس رسم افقى

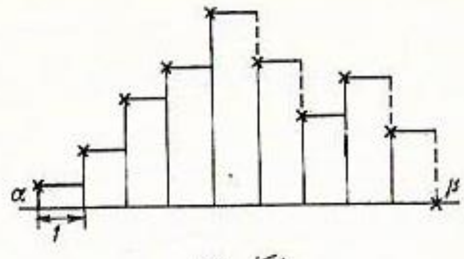



شكل ١٢

صغير . وتبعا لذلك ، تظهر القيم الممكنة متلاصقة الى حد كبير ( شكل ١٢ ) . وبذلك تظهر رؤوس المستقيمات العمودية كما لو كانت متصلة احداها بالاخرى ، مكونة خطا منحنيا يسمى بمنحنى توزيع تلك الكمية العشوائية ، ومن الواضح ان احتمال تحقق المتباينة

$\beta > x > \alpha$ حسب الرسم البيانى يساوى مجموع المستقيمات العمودية المرسومة داخل الفترة ( $\alpha, \beta$ ) .

ولنفرض الان ، ان المسافة بين كل قيمتين ممكنتين ، دائما تساوى واحدا صحيحا ، وهذا يحدث بالطبع عندما تكون القيم الممكنة للكمية العشوائية عبارة عن متسلسلة اعداد صحيحة متتالية ،




شكل ١٣

ويمكن ان يتحقق هذا دائما ، اذا ما اخترنا مقياسا للرسم صغيرا صغرا كافيا . عندئذ يكون طول الخط العمودى مساويا لمساحة المستطيل الذى يكون ارتفاعه عبارة عن هذا الخط العمودى ، وتساوى قاعدته واحدا صحيحا ( وهى البعد بين هذا العمود والعمود المجاور له ) ( شكل ١٣ ) . وبذلك ، فانه يمكن التعبير عن احتمال تحقق المتباينة $\beta > x > \alpha$ بيانيا ، بمجموع مساحات المستطيلات الموضحة بالشكل والواقعة فى هذه الفترة . ولكن اذا كانت القيم الممكنة متلاصقة جدا كما هى عليه فى الشكل ١٢ ، فان مجموع مساحات هذه المستطيلات ، لا يختلف عمليا عن مساحة الشكل المنحنى المحدد من اعلى بمنحنى التوزيع ، ومن اسفل بالفترة ( $\beta$ ، $\alpha$ ) ومن الجانبين بالعمودين المرسومين من النقطتين $\beta$ ، $\alpha$ ( شكل ١٤ ) *

* فى هذه الحالة كالسابق ، تؤخذ المسافة بين كل قيمتين ممكنتين متجاورتين ، كوحدة طول .



وبذلك فانه يمكن بسهولة ويسر ، ايجاد احتمال وقوع الكمية العشوائية فى فترة ما وذلك باستخدام رسم بيانى كما هو موضح فى الشكل ١٤ . وذلك باعتبار الاحتمال مساويا للمساحة الواقعة تحت منحنى التوزيع داخل هذه الفترة . واذا اعطينا قانون التوزيع ، على صورة منحنى موضح بالرسم البيانى ، فسوف لا تظهر على هذا الرسم المستقيمات العمودية . لانها — بالرغم من فقدان اهميتها — ستكون سببا فى تعقيد الرسم البيانى . وكذلك ، فان السؤال نفسه عن احتمالات القيم المنفردة هنا ، يفقد اهميته . فاذا كان عدد القيم الممكنة كبيرا جدا ، ( وهذا الفرض هو الذى يستخدم اساسا لايجاد الرسم البيانى لمنحنى التوزيع ) فان احتمال القيم المنفردة هنا يصبح بوجه عام ، ضئيلا جدا ، ( عمليا يساوى صفرا ) ويفقد بذلك اهميته .




شكل ١٤

فعند قياس المسافة بين منطقتين آهلتين بالسكان مثلا ، قد لا يتحتم ان نعلم ان نتيجة القياس تختلف عن القيمة الحقيقية بمقدار ٤٧٣ سم ، بل الاهم من ذلك ، هو ايجاد احتمال ان يكون هذا الاختلاف محصورا بين ٣ و ٥ امتار . وهكذا ، ففى جميع الحالات المشابهة : اذا اخذت الكمية العشوائية عددا كبيرا من القيم الممكنة ، فان ما يهمنا ، هو معرفة احتمال وقوع هذه الكمية داخل فترات كاملة

من هذه القيم لا احتمال كلّ قيمة على حدة . وتعطى هذه الاحتمالات بالذات بوضوح ، بواسطة المساحات الواقعة تحت المنحنى على الرسم البيانى كما رأينا فيما سبق .

## ٣١ ــ خواص منحنيات التوزيع المعتدلة

ان الكمية العشوائية الموزعة حسب قانون التوزيع المعتدل ، تأخذ دائما عددا غير محدود من القيم الممكنة . ولذلك ، فانه من الاسهل اعطاء قانون التوزيع المعتدل على صورة منحنى موضح بالرسم البيانى . ويوضح الشكل ١٥ ، بعض منحنيات التوزيع معطاة حسب قانون التوزيع المعتدل . وبغض النظر عن جميع الاختلافات فى اشكال هذه المنحنيات فاننا نرى خواص عامة واضحة فيها جميعا .

١ ــ لكل من هذه المنحنيات قمة واحدة « اعلى نقطة » ويتجه المنحنى منها الى اسفل يسارا ويمينا . وهذا يعنى بالطبع انه كلما ابتعدت قيمة الكمية العشوائية عن قيمتها الاكبر احتمالا كلما تناقص احتمال هذه القيمة .

٢ ــ جميع المنحنيات متماثلة بالنسبة للعمود المار باعلى نقطة . وهذا يعنى ان احتمالات القيم المتساوية البعد عن القيمة الاكبر احتمالا ، متساوية .

٣ ) تأخذ جميع هذه المنحنيات شكل الجرس : فالمنحنى محدب الى اعلى فى المنطقة المجاورة للقيمة الاكبر احتمالا . وعلى مسافة معينة من هذه النقطة يلتوى المنحنى ويصبح محدبا الى اسفل . وتختلف هذه المسافة من منحنى الى آخر ( كما هو الحال بالنسبة



لاعلى ارتفاع) * فما هى اوجه الخلاف بين منحنيات التوزيع المعتدلة ؟

لاعطاء اجابة واضحة على هذا السؤال ، يجب اولا وقبل كل شىء ان نتذكر ان المساحة الواقعة تحت اى منحنى توزيع . تساوى واحدا صحيحا . وذلك لان هذه المساحة تساوى احتمال ان تأخذ هذه الكمية العشوائية اية قيمة من قيمها الممكنة . اى تساوى احتمال وقوع حادثة مؤكدة . ولذلك ، فان الاختلاف بين منحنى وآخر يتلخص فى ان هذه المساحة الكلية التى تتساوى بالنسبة لجميع المنحنيات تكون موزعة باشكال مختلفة بالنسبة للاجزاء المختلفة فى الرسم . وكما توضح المنحنيات المبينة فى الشكل ١٥ ، فان المسألة بالنسبة لقوانين التوزيع المعتدلة تتلخص اساسا فى ايجاد مقدار ذلك الجزء من المساحة الكلية ، المركز فى المناطق الواقعة بالقرب من القيمة الاكبر احتمالا ، ومقدار المساحة الواقعة فى المناطق البعيدة عن هذه القيمة . وبالنسبة للقانون الموضح بالشكل ١٥ أ ، فان كل المساحة بالتقريب مركّزة فى المنطقة القريبة من القيمة الاكبر احتمالا ،

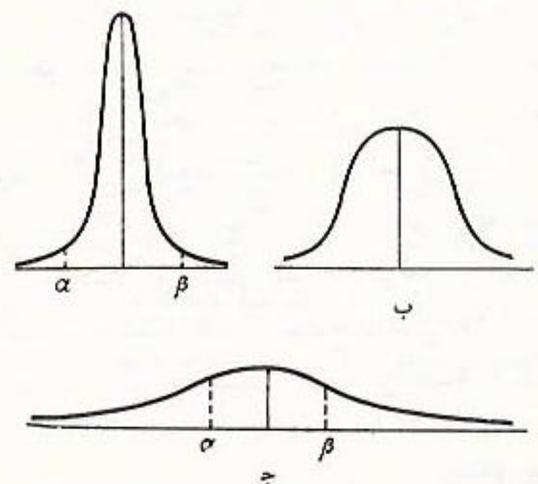
* يلاحظ القارئ الذى يعرف الرياضيات العالية ، ان معادلة المنحنى الذى يمثل قانون التوزيع المعتدل تكون على الصورة التالية :

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})$$

حيث $e = 2,71828$ هى اساس اللوغاريتم الطبيعى . $\pi = 3,14159$ النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطرها ( بالنسبة الثابتة ) والمقداران $a$ و $\sigma^2$ هما على التوالى ، القيمة المتوسطة للكمية العشوائية وتشتتها . وقد تسهل معرفة الصورة التحليلية لقانون التوزيع المعتدل على القارئ ، مهمة استيعاب ما سيأتى فى هذا الكتاب . ولكن طريقة الشرح ستجعل جميع ما سيأتى مفهوما للقارئ الذى لا يعرف الرياضيات العالية ايضا .

وهذا يعنى ، ان الاحتمال الاغلب ( اى فى اغلب الحالات ) هو ان تأخذ الكمية العشوائية قيما قريبة من قيمتها الاكبر احتمالا .

وبناء على ما ذكرنا سابقا بالنسبة لقانون التوزيع المعتدل، من ان منحنى التوزيع متماثل ، وان القيمة الاكثر احتمالا تنطبق دائما على القيمة المتوسطة ، فانه يمكن القول بان الكمية العشوائية الموزعة حسب القانون الموضح فى الشكل ١٥ أ ، قليلة التشتت ، وعلى وجه الدقة ، يكون تشتتها وانحرافها التربيعى بسيطين .




شكل ١٥

وعلى العكس تكون المساحة الواقعة فى المنطقة القريبة من القيمة الاكبر احتمالا ( الحالة المبينة فى الشكل ١٥ ج ) جزءا صغيرا من المساحة الكلية. [سنرى الاختلاف فى الحال اذا ما حددنا فى الشكل ١٥ أوج ، الفترتين ( β ، α ) اللتين لهما طول واحد ، واذا حددنا كذلك المساحة الواقعة فيهما ] ، لذلك فانه من المحتمل جدا هنا ان تأخذ الكمية العشوائية قيما بعيدة بشكل ملحوظ عن قيمتها الاكبر



احتمالا . وتكون الكمية العشوائية متشتتة تشتتا كبيرا ، ويكون كل من تشتتها وانحرافها التربيعى المعيارى كبيرا .

وتقع الحالة ب بالطبع فى الوسط بين الحالتين أ و ج وللتعرف باسرع ما يمكن على مجموعة قوانين التوزيع المعتدل وكذلك لدراسة كيفية استعمالها ، يجب ان نبدأ اولا بخاصيتين اساسيتين من خواص هذه القوانين . ولن نستطيع اثبات هاتين الخاصيتين اللتين سنصيغهما الآن بالتفصيل ، ذلك لانه يتطلب من القارئ لاثباتها ، معرفة الرياضيات العالية .

الخاصية الاولى : اذا كانت الكمية العشوائية $x$ تخضع لقانون التوزيع المعتدل فان :

١ ــ لاى ثابتين $c > 0$ و $d$ تكون الكمية $cx+d$ خاضعة ايضا لقانون التوزيع المعتدل .

٢ ــ وبالعكس ، لاى قانون توزيع معتدل يوجد زوج ( واحد ) من الاعداد $c > 0$ و $d$ بحيث تخضع الكمية $cx+d$ لنفس قانون التوزيع هذا بالذات .

وبناء على ذلك ، فاذا كانت الكمية العشوائية $x$ خاضعة لقانون التوزيع المعتدل ، فان قوانين التوزيع التى تخضع لها الكمية $cx+d$ لاية قيم ممكنة للثابتين $c > 0$ و $d$ ، هى عبارة عن قوانين توزيع معتدلة .

الخاصية الثانية : اذا كانت الكميتان العشوائيتان $x$ و $y$ مستقلتين عن بعضهما البعض وخاضعتين لقوانين التوزيع المعتدلة . فان مجموعهما $z = x + y$ يخضع كذلك لقانون توزيع معتدل ما . واذا استعملنا هاتين الخاصيتين بدون اثبات ، فيمكننا وبشكل دقيق ،

ايجاد مجموعة من خواص قوانين التوزيع المعتدلة التى لها اهمية عملية خاصة .

**١ ـ لاى عددين $a$ و $q>0$ يوجد قانون توزيع معتدل واحد ذو قيمة متوسطة $a$ وانحراف تربيعى معيارى $q$ .**

فى الواقع لو فرضنا ان $x$ كمية عشوائية خاضعة لقانون التوزيع المعتدل وان قيمتها المتوسطة $x$ وانحرافها التربيعى المعيارى $Q_x$ . وباستعمال الخاصية الاولى ، نستطيع اثبات المطلوب اذا ما اوضحنا انه يوجد زوج واحد من الاعداد $c>0$ و $d$ يحقق ما طلب من ان الكمية $cx+d$ لها قيمة متوسطة $a$ وانحراف تربيعى معيارى $q$ .

واذا كان جدول قيم الكمية $x$ على الصورة

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

فان الكمية $cx+d$ ( حيث $c>0$ و $d$ مقداران ثابتان ) يناظرها الجدول

| | | | |
|---|---|---|---|
| $cx_1+d$ | $cx_2+d$ | ... | $cx_n+d$ |
| $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

ومن الواضح ان

$$\sum_k^{*} x_k p_k = \overline{x},\ \sum_k (x_k - \overline{x})^2 p_k = Q_x^2 \,{*}$$

---

* الرمز $\sum_k$ مختصر ، وتفصيله هو $\sum_{k=1}^{n}$ .

10 Зак. 10122



ويؤول المطلوب الى الشرطين التاليين :

$$\sum_k (cx_k + d)p_k = a;\ \sum_k (cx_k + d - a)^2 p_k = q^2$$

يعطينا الشرط الاول $c\sum_k x_k p_k + d\sum_k p_k = a,$

(1) $\qquad c\overline{x} + d = a$ أو

ويعطينا الثانى :

$$\sum_k (cx_k + d - c\overline{x} - d)^2 p_k = c^2 \sum_k (x_k - \overline{x})^2 p_k = c^2 Q_x^2 = q^2$$

ومنه ينتج ان ( حيث ان $c>0$ )

(2) $$c = \frac{q}{Q_x}$$

ومن (١) نجد ان :

(3) $$d = a - c\overline{x} = a - \frac{q\overline{x}}{Q_x}$$

وبناء على ذلك ، فاذا اعطينا $a$ و $q$ يمكن ايجاد $d$ و $c$ بواسطة العلاقتين (2) و (3) . وفى نفس الوقت ، يكون هذان العددان وحيدين . وتخضع الكمية العشوائية $cx+d$ لقانون التوزيع المعتدل ، التى تكون قيمتها المتوسطة $a$ والانحراف التربيعى المعيارى $q$ . وبذلك نكون قد اثبتنا المطلوب .

واذا خرجنا عن قوانين التوزيع المعتدلة ودرسنا اى قانون توزيع آخر ، فان معلومية القيمة المتوسطة والتشتت او الانحراف التربيعى المعيارى للكمية العشوائية تعطينا معلومات قليلة عن قانون توزيع هذه الكمية ، وذلك لانه يوجد عدد كبير جدا من قوانين التوزيع ( مختلفة كثيرا فيما بينها ) التى لها قيمة متوسطة واحدة وتشتت واحد .

وغالبا ما تعطينا معلومية القيمة المتوسطة والتشتت ، بعض المعلومات التقريبية جدا عن قانون توزيع الكمية العشوائية .

واذا ما وافقنا على ان تقتصر دراستنا على قوانين التوزيع المعتدلة فان الامر قد يتغير . وكما تأكدنا الان ، فمن ناحية ، يتفق اى افتراض بالنسبة للقيمة المتوسطة لهذه الكمية العشوائية وبالنسبة لتشتتها على شرط ان يكون قانون توزيعها معتدلا ، ومن ناحية اخرى ، وهذا هو الاهم ، اذا ما استطعنا مسبقا افتراض ان كمية عشوائية ما خاضعة لاحد قوانين التوزيع المعتدل ، فان اعطاء قيمتها المتوسطة وتشتتها يحدد قانون التوزيع هذا ، ويكون هذا القانون وحيدا ، اى ان طبيعة هذه الكمية ، ككمية عشوائية تصبح معلومة تماما .

وبالتحديد ، اذا علمنا القيمة المتوسطة لهذه الكمية العشوائية وتشتتها ، يمكن ايجاد احتمال ان تقع قيمة هذه الكمية فى منطقة او اخرى نختارها كما نريد .

**٢ ـ نسبة قيمة الانحراف الوسطى (الاحتمالى) الى قيمة الانحراف التربيعى المعيارى ثابتة لا تتغير بالنسبة لجميع قوانين التوزيع المعتدلة .**

نفرض انه عندنا اى قانونين من قوانين التوزيع المعتدلة ، ونفرض ان $x$ كمية عشوائية خاضعة للقانون الاول من هذين القانونين . فمن ناحية الخاصية الاساسية الاولى ، هناك ثابتان $c>0$ و $d$ ، بحيث تخضع الكمية العشوائية $cx+d$ للقانون الثانى من هذين القانونين . نرمز للانحراف التربيعى المعيارى والانحراف الوسطى (الاحتمالى) على التوالى بـ $Q_x$ و $E_x$ بالنسبة للكمية الاولى ، وبـ $q$ و $e$ لنفس هاتين الكميتين بالنسبة للكمية العشوائية الثانية .



ومن تعريف الانحراف الاحتمالى فان

$$P\{|(cx+d)-(c\bar{x}+d)|<e\}=\frac{1}{2}$$

او

$$P\{c|x-\bar{x}|<e\}=\frac{1}{2}$$

او اخيرا

$$P\left(|x-\bar{x}|<\frac{e}{c}\right)=\frac{1}{2}$$

ومن ذلك . وباستعمال تعريف الانحراف الاحتمالى ثانية، ينتج ان $\frac{e}{c}$ عبارة عن انحراف احتمالى للكمية العشوائية $x$ اى ان $\frac{e}{c}=E_x$ وبالتالى، فان $\frac{e}{E_x}=c$ ولذلك، فانه من العلاقة (2) ينتج ان $\frac{e}{E_x}=\frac{q}{Q_x}$ ومنه ينتج ان $\frac{e}{q}=\frac{E_x}{Q_x}$ اى ان نسبة الانحراف الاحتمالى الى الانحراف التربيعى المعيارى واحدة لهذين القانونين .

وبما ان هذين القانونين بالفرض ، غير محددين باى شرط ، بل انهما معتدلان ، فاننا نكون قد اثبتنا المطلوب .

ولذلك ، فان النسبة $\frac{e}{q}$ هى ثابت مطلق نرمز اليه بـ $\lambda$ ومعلوم ان

$$\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\approx 0{,}674 ،$$

اى ان $e=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,q$ لاى قانون توزيع معتدل .

ومن نتيجة هذا الارتباط البسيط جدا بين العددين $q$ و $e$ للكميات الخاضعة لقانون التوزيع المعتدل ، اصبح عمليا ، سيان ان نستعمل اى واحد من مميزى التشتت هذين . وقد رأينا سابقا ، ان الانحراف التربيعى المعيارى على العموم ، يتمتع ببعض الخواص البسيطة التى لا توجد بالنسبة لمميزات كثيرة . ( اى اذا لم نتقيد بالكميات العشوائية الخاضعة لقوانين التوزيع المعتدلة ) وهذه الخواص تضطر المشتغلين بنظرية الاحتمالات سواء النظريين منهم او العمليين الى استعمال الانحراف التربيعى المعيارى فى اغلب الحالات ،

كمميز يدل على التشتت . وقد ذكرنا ان رجال المدفعية غالبا ما يستعملون الانحراف الاحتمالى . ونحن نرى الان لماذا لا يؤدى هذا الاستعمال الى اية خسارة . اذ ان الكمية العشوائية التى يتعامل رجال المدفعية بها ، قد اتضح عمليا ونظريا ، انها تخضع — على الاكثر — لقوانين التوزيع المعتدلة . وحسب ما اثبتناه الان ، يكون اختيار احد هذين المميزين على حد سواء .

**٣ — نفرض ان $x$ و $y$ كميتان عشوائيتان مستقلتان عن بعضهما البعض وتخضعان لقانونى توزيع معتدلين ، وان $z=x+y$ . عندئذ تكون**

$$E_z = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

**حيث ان $E_x$ , $E_y$ , $E_z$ عبارة عن الانحراف الاحتمالى لكل من الكمات $z$ , $y$ , $x$ على التوالى .**

وكما علمنا من البند ٢٥ ، توجد علاقة على غرار هذه العلاقة الاخيرة بالنسبة للانحرافات التربيعية المعيارية بغض النظر عن طبيعة قانونى توزيع الكميتين $y$ , $x$ . واذا كان هذان القانونان من قوانين التوزيع المعتدلة ، فانه ينتج من الخاصية الاساسية الثانية ، ان $z$ ايضا ، تخضع لقانون التوزيع المعتدل . ولذلك فباستعمال الخاصية ( ٢ ) السابقة ، نجد ان

$$E_x = \lambda Q_x,\ E_y = \lambda Q_y,\ E_z = \lambda Q_z$$

وهذا يعنى ان

$$E_z = \lambda\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{(\lambda Q_x)^2 + (\lambda Q_y)^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

ومن هنا نرى انه فى حالة قوانين التوزيع المعتدلة ، فان احدى الخواص الهامة للانحراف التربيعى المعيارى تتحقق مباشرة بالنسبة للانحراف الاحتمالى ( الوسطى ) ايضا .



## ٣٢ — حل بعض المسائل :

نصطلح على تسمية قانون التوزيع الذى تساوى قيمته المتوسطة صفرا ، ويساوى انحرافه ، الواحد الصحيح ، بقانون التوزيع المعتدل المركزى . واذا كانت $x$ كمية عشوائية تخضع لقانون التوزيع المعتدل المركزى ، فاننا للاختصار فى الكتابة ، نفرض ان

$$P\{|x| < a\} = \Phi(a)$$

لاى مقدار موجب $a$ . وعلى ذلك ، فان $\Phi(a)$ هى احتمال ان لا تزيد القيمة المطلقة للكمية العشوائية $x$ التى تخضع لقانون التوزيع المعتدل المركزى، عن المقدار $a$. وبالنسبة للمقدار $\Phi(a)$ يوجد جدول دقيق جدا يعطينا قيمته المختلفة لجميع قيم $a$ المختلفة . وهذا الجدول هام جدا، ووسيلة لا يستغنى عنها بالنسبة لكل من يتعامل بحسابات الاحتمالات . ويكون هذا الجدول دائما، موجودا فى نهاية اى كتاب عن نظرية الاحتمالات . وفى نهاية هذا الكتاب يجد القارئ هذا الجدول ايضا . واذا وجد جدول بقيم الدالة $\Phi(a)$ تحت يد الباحث فيمكنه بسهولة وبدقة كبيرة ايجاد الحسابات الخاصة باية كمية عشوائية موزعة بقانون التوزيع المعتدل . وسنوضح الان بالامثلة ، كيفية اجراء هذه الحسابات .

مسألة ١ . اذا كانت الكمية العشوائية $x$ موزعة بقانون التوزيع المعتدل ، وقيمتها المتوسطة $\bar{x}$ وانحرافها التربيعى المعيارى $Q_x$ . اوجد احتمال الا تزيد القيمة المطلقة للاختلاف $x-\bar{x}$ عن المقدار $a$.

نفرض ان $z$ كمية عشوائية تخضع لقانون التوزيع المعتدل المركزى، فمن الخاصية الاساسية (صفحة ١٥٩ ) يمكن ايجاد الاعداد $c>0$ و $d$ بحيث ان القيمة المتوسطة للكمية $cz+d$ تساوى $\bar{x}$ وانحرافها

التربيعى المعيارى لها يساوى $Q_x$ ، اى تخضع لنفس قانون التوزيع المعتدل الذى له الكمية $x$ ولذلك ، فان :

$$P(|x-\overline{x}|<a)=P(|(cz+d)-(c\overline{z}+d)|<a)=P(c|z-\overline{z}|<a);$$

ولكن ينتج من العلاقة (2) ( صفحة ١٦١ ) ان :

$C=\frac{Q_x}{Q_z}=Q_x$ وذلك لان $Q_z=1$ ( بالنسبة لقانون التوزيع المعتدل المركزى فان التشتت يساوى واحدا صحيحا ) وبذلك نجد ان :

$$P(x-\overline{x}|<a)=P(Q_x)|z-\overline{z}|<a)=P\left(|z|<\frac{a}{Q_x}\right)=\Phi\left(\frac{a}{Q_x}\right) \quad (4)$$

وهنا نصل الى الحل المطلوب للمسألة ، وذلك لاننا نجد المقدار $\Phi\left(\frac{a}{Q_x}\right)$ مباشرة من الجدول .

وبناء على ذلك ، فان هذا الجدول يمكن ان يسهل لنا بمساعدة العلاقة (4) حساب احتمال اية فترة اختلاف ( او انحراف) للكمية العشوائية التى تخضع لاى قانون توزيع معتدل .

مثال ١ — تصنع قطعة غيار معينة على ماكينة ما . فاذا اتضح ان طول هذه القطعة عبارة عن كمية عشوائية موزعة بقانون التوزيع المعتدل ، وقيمتها المتوسطة تساوى ٢٠ سم وانحرافها التربيعى المعيارى يساوى ٠ر٢ سم . اوجد احتمال ان يكون طول القطعة محصورا بين ١٩ر٧ سم و ٢٠،٣ سم اى ان الاختلاف سواء بالزيادة او بالنقصان لا يزيد عن ٠ر٣ سم .

من العلاقة (4) ومن الجدول ، ينتج ان

$$P\{|x-20|<0{,}3\}=\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right)=\Phi(1{,}5)=0.866$$



اى ان طول ٨٧٪ من القطع التى تصنع تحت هذه الظروف ينحصر بين ١٩ر٧ و ٢٠ر٣ سم ، وطول الـ ١٣٪ الباقية يكون اختلافه عن القيمة المتوسطة اكبر .

مثال ٢ — تحت نفس شروط المثال السابق . اوجد دقة طول القطعة التى يمكن ضمانها باحتمال ٠ر٩٥ .

من الواضح ان المسألة تتلخص الان فى ايجاد العدد الموجب $a$ الذى يحقق المتباينة التالية :

$$P\{|x-20|<a\}>0{,}95$$

لقد اوضحت الحسابات فى المثال ( ١ ) ، ان $a=0{,}3$ وهذا لا يكفى ، ذلك لان الطرف الايسر للمتباينة الاخيرة اصغر من ٠ر٨٧ . وحيث انه وفقا للعلاقة (4) يكون

$$P\{|x-20|<a\}=\Phi\left(\frac{a}{0{,}2}\right)=\Phi(5a)$$

فانه قبل كل شئ ، يجب ان نجد فى الجدول قيمة المقدار $5a$ التى تحقق المتباينة $\Phi(5a)>0{,}95$ وهنا نجد ان هذه المتباينة تتحقق عندما تكون $5a>1{,}97$ ومنه نجد ان $a>0{,}394$ .

و بناء على ذلك فان باحتمال اكبر من ٠ر٩٥ ، يمكن ضمان الا يختلف طول القطعة عن القيمة المتوسطة باكثر من ٠ر٤ سم .

مثال ٣: فى بعض المسائل العملية، اعتبر بان الكمية العشوائية $x$ الخاضعة لقانون التوزيع المعتدل ، لا تكتشف الانحراف الذى يكون اكبر من ثلاثة اضعاف الانحراف التربيعى المعيارى $Q_x$ . فما هو اساس هذا الاعتبار ؟

توضح العلاقة (4) والجدول ان

$$P\{|x-\overline{x}|<3Q_x\}=\Phi(3)>0{,}997$$

وبالتالى، فان $P\{|x-\overline{x}|>3Q_x\}<0{,}003$

ويعنى هذا عمليا ، انه يقابلنا اختلاف اكبر من $3Q_x$، اقل من ثلاث مرات فى كل الف مرة . فهل يمكن اهمال هذه الامكانية او يجب اخذها فى الاعتبار ؟ من الواضح ان هذا يعتمد على مضمون المسألة ولا يمكن اقرار هذه الحقيقة او تلك بصفة دائمة . نلاحظ ان العلاقة $P\{|x-\overline{x}|<3Q_x\}=\Phi(3)$ هى حالة خاصة من العلاقة

$$P\{|x-\overline{x}|<aQ_x\}=\Phi(a) \qquad (5)$$

التى تنتج من العلاقة ( 4 ) وهى صحيحة بالنسبة لاية كمية عشوائية $x$ تخضع لقانون التوزيع المعتدل .

مثال ٤ : اتضح من الوزن المتوسط لسلعة ما والذى يساوى ٨٫٤ كجم ، ان الاختلاف فى الوزن الذى لا تزيد قيمته المطلقة على ٥٠ جم ، يقابلنا فى المتوسط ، ثلاث مرات من بين كل مئة سلعة . فاذا اعتبرنا ان وزن السلعة كمية عشوائية تخضع لقانون التوزيع المعتدل ، اوجد الانحراف الاحتمالى لهذا القانون . نعلم ان :

$$P(|x-8{,}4|>0{,}05)=0{,}03$$

حيث $x$ وزن سلعة ما اخذت عشوائيا . وينتج من هنا ان :

$$0{,}97=P(|x-8{,}4|<0{,}05)=\Phi\left(\frac{0{,}05}{Q_x}\right)$$

ويتضح من الجدول ، ان $\Phi(a)=0{,}97$ عندما تكون $a\approx 2{,}12$

ولذلك ، فان

$$\frac{0{,}05}{Q_x}\approx 2{,}12$$



اى ان

$$Q_x\approx\frac{0{,}05}{2{,}12}$$

وكما عرفنا مما سبق ( صفحة ١٦٣ ) فان الانحراف الاحتمالى يساوى :

$$E_x=0{,}674\ Q_x\approx 0{,}0155\ kg=15{,}5g$$

مثال ٥ : تنحرف الرصاصة عن هدفها نتيجة لثلاثة عوامل مستقلة مختلفة .

١ ـ خطأ فى تحديد موضع الهدف . ٢ ـ خطأ فى التصويب . ٣ ـ خطأ يحدث نتيجة عوامل تختلف من طلقة الى اخرى . ( وزن الرصاصة ، حالة الجو . . . وهكذا ) .

فاذا فرضنا ان هذه الاخطاء الثلاثة عبارة عن كميات عشوائية تخضع لقوانين التوزيع المعتدل ، وان قيمتها المتوسطة تساوى صفرا وانحرافها الاحتمالى يساوى ٢٤ مترا ، ٨ امتار ، ١٢ مترا على الترتيب ، اوجد احتمال الا يزيد مجموع الانحرافات عن الهدف عن ٤٠ مترا .

بما انه يتضح من الخاصية ٣ (صفحة ١٦٤ ) ان الانحراف الاحتمالى لمجموع الاخطاء $x$ يساوى

$$\sqrt{٢٤^٢+٨^٢+١٢^٢}=٢٨ \text{ م}$$

فان الانحراف التربيعى المعيارى لمجموع الاخطاء يساوى

$$\frac{٢٨}{٠٫٦٧٤}=٤١٫٥$$

اى ان :

$$P(|x|<40)=\Phi\left(\frac{40}{41{,}5}\right)\approx\Phi(0{,}964)=0{,}665$$

وبالتالى، فان عدد مرات الانحراف الذى لا يزيد عن ٤٠ مترا ، يساوى بالتقريب $\frac{٢}{٣}$ عدد الحالات كلها .

مسألة ٢ -- تخضع الكمية العشوائية $x$ لقانون التوزيع المعتدل ، فاذا كانت قيمتها المتوسطة $\overline{x}$ وانحرافها التربيعى المعيارى $Q_x$ . اوجد احتمال ان تنحصر القيمة المطلقة للاختلاف $x - \overline{x}$ بين العددين $a$ و $b$ $(0 < a < b)$ .

بما ان من قاعدة الجمع يكون

$$P(|x-\overline{x}| < b) = P(|x-\overline{x}| < a) + P(a < |x-\overline{x}| < b)$$

فان :

$$P(a < |x-\overline{x}| < b) = P(|x-\overline{x}| < b) - P(|x-\overline{x}| < a) = \Phi\left(\frac{b}{Q_x}\right) - \Phi\left(\frac{P}{Q_x}\right) \quad (6)$$

وهو المطلوب ايجاده .

لتلبية اغلب المتطلبات العملية ، يكون جدول قيم الكمية $\Phi(a)$ الذى استخدمناه حتى الان ، عبارة عن وسيلة صعبة لاجراء الحسابات . فغالبا ما يتطلب فقط ، حساب احتمال ان يقع الاختلاف $x - \overline{x}$ فى فترة ما صغيرة او كبيرة . ولذلك فانه يجب ان يكون عندنا الى جانب الجدول « المتكامل » الذى تحدثنا عنه ، جدول مختصر آخر ، يمكن ترتيبه بسهولة من الجدول المتكامل وذلك باستعمال العلاقة (6) .

سنورد مثالا عن كيفية ترتيب مثل هذا الجدول ، ولو انه اقل دقة بكثير من الجدول الوارد فى نهاية الكتاب ، الا انه فى حالات كثيرة يعتبر كافيا جدا .

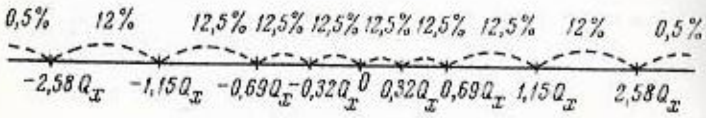


نقسم فترة تغير المقدار $|x-\overline{x}|$ الى خمسة اجزاء . ١) من الصفر الى $0,32Q_x$ ، ٢) من $0,32Q_x$ الى $0,69Q_x$ ، ٣) من $0,69Q_x$ الى $1,15Q_x$ . ٤) من $1,15Q_x$ الى $2,58Q_x$ ٥) ، اكبر من $2,58Q_x$ .

وباستعمال العلاقة (4) نجد ان

$$P(|x-\overline{x}| < 0,32\ Q_x) = \Phi(0,32) \approx 0,25;$$
$$P(0,32\ Q_x < |x-\overline{x}| < 0,69\ Q_x) = \Phi(0,69) - \Phi(0,32) \approx 0,25;$$
$$P(0,69\ Q_x < |x-\overline{x}| < 1,15\ Q_x) = \Phi(1,15) - \Phi(0,69) \approx 0,25;$$
$$P(1,15\ Q_x < |x-\overline{x}| < 2,58\ Q_x) = \Phi(2,58) - \Phi(1,15) \approx 0,24;$$
$$P(|x-\overline{x}| > 2,58\, Q_x) = 1 - \Phi(2,58) \approx 0,01.$$

ومن الافضل توضيح هذه النتائج بمساعدة الرسم البيانى كما هو وارد فى الشكل ١٦ .




شكل ١٦

فى هذا الشكل ، قسم الخط المستقيم اللانهائى ، الى عشرة اجزاء . خمسة اجزاء منها موجبة . وخمسة سالبة . وفوق كل جزء ، وضحت النسبة الحقيقية للاختلافات التى تقع فى المتوسط ، على هذا الجزء ، وتبعا للحسابات التى اجريناها اعلاه . لا بد ان يقع على الجزأين $(0,69Q_x\ ,\ 1,15Q_x)$ و $(-1,15Q_x\ ,\ -0,69Q_x)$ معا . حوالى ٢٥٪ من جميع الاختلافات . ومن تماثل قوانين التوزيع المعتدلة ، يكون عدد الاختلافات التى تقع على هذين الجزأين متساويا اى انه يقع على كل منها ١٢٫٥ ٪ من العدد الكلى للاختلافات . واذا كان عندنا مثل هذا الرسم البيانى ، فيمكننا مباشرة تصور الخواص

الاساسية لتوزيع اختلافات ( انحرافات ) الكمية العشوائية التى تخضع لقانون التوزيع المعتدل ، مهما كانت القيمة المتوسطة والانحراف التربيعى المعيارى .

واخيرا ، سنحاول حساب احتمال وقوع الكمية العشوائية التى تخضع لقانون التوزيع المعتدل داخل فترة ما معطاة .

مسألة ٣. اذا علمنا ان الكمية العشوائية $x$ تخضع لقانون التوزيع المعتدل ( القيمة المتوسطة $\bar{x}$ ، والانحراف التربيعى المعيارى $Q_x$ ) احسب بمساعدة الجدول احتمال تحقق المتباينة $a<x<b$ حيث $a$ و $b$ $(a<b)$ عددان اختياريان معلومان .

يتعين علينا دراسة ثلاث حالات تتوقف كل منها على موضع العددين $a$ و $b$ بالنسبة الى $\bar{x}$ .

الحالة الاولى $\bar{x}\leqslant a\leqslant b$

من قاعدة الجمع تكون

$$P(\bar{x}<x<b)=P(\bar{x}<x<a)+P(a<\bar{x}<b)$$

ومن هنا نجد ان

$$P(a<x<b)=P(\bar{x}<x<b)-P(\bar{x}<x<a)=$$
$$=P(0<\bar{x}<b-\bar{x})-P(0<x-\bar{x}<a-\bar{x}).$$

ولكننا بالنسبة لاية قيمة لـ $a>0$ نجد من تماثل قوانين التوزيع المعتدلة ان :

$$P(0<x-\bar{x}<a)=P(-a<x-\bar{x}<0)=\frac{1}{2}P(-a<x-\bar{x}<a)=$$
$$=\frac{1}{2}P(|x-\bar{x}|<a)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a}{Q_x}\right) \qquad (7)$$



ولذلك فان :

$$P(a<x<b)=\frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{Q_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{Q_x}\right)\right\}$$

الحالة الثانية : $a\leqslant\bar{x}\leqslant b$

$$P(a<x<b)=P(a<x<\bar{x})+P(\bar{x}\leq x<b)=$$
$$=P(a-\bar{x}<x-\bar{x}<0)+P(0<x-\bar{x}<b-\bar{x})=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{\bar{x}-a}{Q_x}\right)+\Phi\left(\frac{x-\bar{b}}{Q_x}\right)\right\}.$$

وذلك من العلاقة (7) .

الحالة الثالثة : $a\leqslant b\leqslant\bar{x}$

$$P(a<x<\bar{x})=P(a<x<b)+P(b<x<\bar{x})$$

ومن هنا نجد ان :

$$P(a<x<b)=P(a<x<\bar{x})+P(b<x<\bar{x})=$$
$$P(a-\bar{x}<x-\bar{x}<0)-P(b-\bar{x}<x-\bar{x}<0)=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{\bar{x}-a}{Q_x}\right)-\Phi\left(\frac{x-\bar{b}}{Q_x}\right)\right\}$$

وبذلك نكون قد وصلنا الى حل المسألة فى حالاتها الثلاث المختلفة . ونرى ان الجدول يعطينا امكانية ايجاد احتمال وقوع الكمية العشوائية، الموزعة باى قانون توزيع معتدل ، فى اية فترة .

وبناء على ذلك ، فان هذا الجدول يحدد لنا قانون توزيع هذه الكمية بصورة نهائية .

لكى تتضح لنا طريقة اجراء هذه الحسابات عمليا ، نأخذ المثال التالى :

مثال : يجرى اطلاق النار من النقطة $O$ فى اتجاه المستقيم $OX$ طول المسافة المتوسطة التى تقطعها القذيفة يساوى ١٢٠٠ متر . اذا فرضنا ان المسافة التى تقطعها القذيفة $H$ عبارة عن كمية عشوائية

تخضع لقانون التوزيع المعتدل بانحراف تربيعي معياري يساوى ٤٠ مترا . اوجد نسبة القذائف المطلقة التى تبعد عن المسافة المتوسطة بمقدار يتراوح بين ٦٠ و ٨٠ مترا .

لكى تقطع القذيفة مسافة تزيد على المسافة المتوسطة بهذا المقدار ، يجب ان تكون $1260<H<1280$. وباستعمال العلاقة النهائية التى حصلنا عليها فى الحالة الاولى من المسألة ٣، نجد ان :

$$P(1260<H<1280)=\frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{1280-1200}{40}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi\left(\frac{1260-1200}{40}\right)\right\}=\frac{1}{2}\{\Phi(2)-\Phi(1{,}5)\};$$

ومن الجدول نجد ان

$$\Phi(2)\approx 0{,}955,\ \Phi(1{,}5)\approx 0{,}866,$$

ومن هنا نجد ان

$$P(1260<H<1280)\approx 0{,}044$$

ونرى ان اكثر قليلا من ٤ ٪ من القذائف المطلقة ، تبعد عن المسافة المتوسطة بهذا المقدار .

الباب الثالث عشر

# مبادئ نظرية العمليات العشوائية

## ٣٣ ـ فكرة عن العمليات العشوائية

عند دراسة الظواهر الطبيعية ، او العمليات التكنيكية او الاقتصادية ، او قضايا المواصلات ، غالبا ما نجد انفسنا امام وضع معين . وهو ان دراسة هذه الظواهر او العمليات ، تتطلب دراسة كميات عشوائية تتغير مع الزمن . لنستعرض الان بعض الامثلة على ذلك .

من المعلوم ان ظاهرة الانتشار تتلخص في ان جزيئات مادة ما ، تتداخل فى مادة اخرى وتختلط الجزيئات فيما بينها . وسنتتبع الان حركة جزئ معين : نفرض ان فى اللحظة الابتدائية $t_0=0$ كان الجزئ قيد الملاحظة فى الموضع $(x_0, y_0, z_0)$ وان مركبات سرعته عند هذه اللحظة فى اتجاه محاور الاحداثيات هى $(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ . فى لحظات عشوائية من الزمن يتصادم هذا الجزئ مع جزيئات اخرى بحيث لا يتغير بذلك موضعه فقط ، بل تتغير سرعته واتجاهه . ولا يمكن التنبؤ بهذا التغير بالضبط ، ذلك لاننا لا نعلم مسبقا ، لا لحظات التصادم ، ولا عدد مرات التصادم فى فترة معينة ، ولا سرعة الجزيئات التى يتصادم معها الجزئ قيد الملاحظة. ونتيجة لذلك ، يحدد موضع الجزئ فى اللحظة $t$ بواسطة ثلاث مركبات هى $x(t), y(t), z(t)$ . وهذه المركبات هى عبارة عن دوال عشوائية فى الزمن . وكذلك تعتبر مركبات سرعة الجزئ قيد الملاحظة $v_x(t)\ v_y(t)\ v_z(t)$ كميات عشوائية تتغير تبعا لتغير الزمن $t$ .

ندرس الان جهازا ميكانيكيا معقد التركيب يتكون من عدد كبير من الاجزاء ــ مكثفات ، مقاومات ، صمامات ، واجزاء ميكانيكية اخرى وغيرها . قد يفقد كل جزء من هذه الاجزاء لسبب و لآخر ، قدرته على العمل ، ويصبح فى حالة يتوقف عندها عن اداء مهمته. وتسمى هذه الحالة بحالة التعطل او « تعطل الجزء المذكور». وقد اوضحت المشاهدات المستمرة لاجهزة مختلفة معقدة التركيب، ان طول فترة العمل المتواصل للجهاز ، اى الفترة التى تمر من لحظة بدء عمل الجهاز حتى لحظة تعطله ، لا يمكن التنبؤ بها مسبقا ، ذلك لانها عبارة عن كمية عشوائية . ولنفرض الان انه يحدث تغيير فورى للجزء الذى يتعطل عن العمل ، وذلك فى نفس لحظة تعطله فيستبدل بجزء جديد ومن نفس النوع ، وان الجهاز قيد البحث ، يواصل عمله بدون توقف . والان نطرح السؤال التالى :

كم هو عدد الاجزاء التى يلزم تغييرها فى فترة من الزمن تبدأ من الصفر حتى اللحظة $t$ ؟

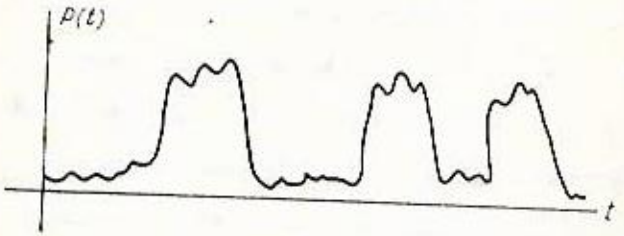
لا يعتمد هذا العدد الذى نرمز اليه ب $n(t)$ على $t$ فقط ، وانما يعتبر فى نفس الوقت كمية عشوائية . وبذلك نكون امام مثال آخر من امثلة الكميات العشوائية التى تتغير مع الزمن . ولهذه الكمية العشوائية خاصية هامة ، وهى انها لا تتناقص وتتغير فى لحظات عشوائية بمقدار عدد صحيح ( عدد الاجزاء التى تتعطل فى لحظة التغيير ) . ولمثل هذه الدوال العشوائية اهمية خاصة فى نظرية الكفاءة ــ وهى فرع جديد ومهم من فروع العلوم الهندسية ــ وتطبق فيه نظرية الاحتمالات تطبيقا واسعا .

وتلعب الطاقة الكهربائية فى المنشآت الهندسية الحديثة دورا كبيرا فى تشغيل المؤسسات الصناعية . وهنا تبرز بعض الاسئلة المهمة ايضا

11 Jan 1962



وهى : ما هى كمية الطاقة اللازمة لمصنع ما او لقسم منه ؟ ما هو مقدار القدرة اللازمة للتشغيل فى كل لحظة معينة ؟ كيف يمكن التحكم فى اختبار الاسلاك الكهربائية بحيث لا تكون قدرتها صغيرة ولا تعطب عند تحمل القدرات العالية اللازمة للتشغيل فى فترات العمل العادى . ومن ناحية اخرى كيف يمكن حساب الطاقة اللازمة بحيث لا نستعمل اسلاكا ذات سمك اكبر من اللازم ، لاننا فى هذه الحالة ، سنكون قد استعملنا كمية من المعدن اكثر من الكمية اللازمة للاسلاك ، مما يؤدى الى خسارة فى رأس المال ؟



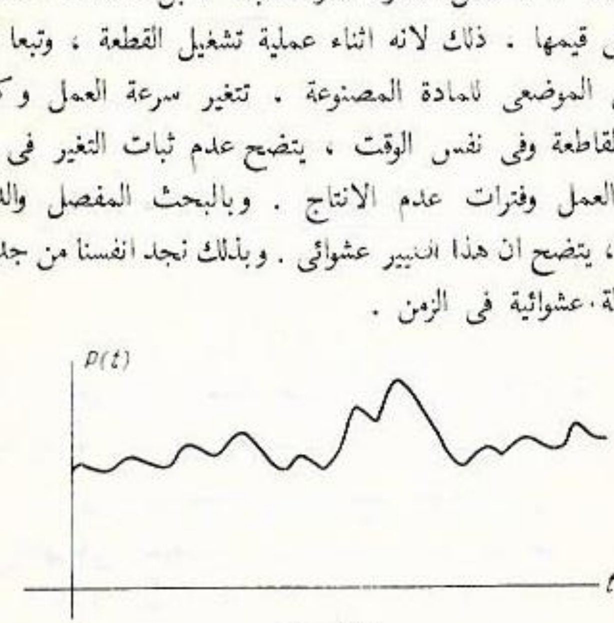

شكل ١٧

للاجابة على هذه الاسئلة يجب بالطبع ، ان نعرف بدقة ، الصورة الفعلية للطاقة الكهربائية اللازمة لكل ماكينة على حدة ، وللآلات الميكانيكية والاجهزة المختلفة ، ولجميع الاجزاء التى تعمل بواسطة التيار الكهربائى والموصلة بسلك واحد ( ويسمى هذا حسب اصطلاح علماء الطاقة « بالمغذى » ) .

لقد اجريت مثل هذه الابحاث فى مؤسسات مختلفة . كمؤسسات التعدين ومؤسسات تشغيل المعادن ، واستخراج البترول ، والمؤسسات الكيميائية وغيرها . وبهذا الصدد سنورد رسما بيانيا يوضح نتائج البحث التى اجريت فى احدى مؤسسات تشغيل المعادن .

وعلى العموم . يمكن اعتبار ان هذا الرسم البيانى ينطبق على المؤسسات الاخرى .

يوضح الشكل ١٧ قيم القدرة اللازمة للمخرطة ( ماكنة الخراطة ) تتتابع فترات عمل الماكنة بفترات عدم عملها . اى عندما لا تقوم الماكنة باى عمل مفيد ، وتختلف القدرة اللازمة تبعا لتتابع هذه الفترات الزمنية المختلفة . اذ ترتفع القدرة المطلوبة من الصفر فى فترات عدم الانتاج . الى قيمها اللازمة فى فترات العمل . ولكن فى هذه الحالة . لا تظل القدرة اللازمة ثابتة . بل تحدث اختلافات كبيرة فى قيمها . ذلك لانه اثناء عملية تشغيل القطعة ، وتبعا لعدم التجانس الموضعى للمادة المصنوعة . تتغير سرعة العمل وكذلك القوى القاطعة وفى نفس الوقت ، يتضح عدم ثبات التغير فى طول فترات العمل وفترات عدم الانتاج . وبالبحث المفصل والدراسة الدقيقة ، يتضح ان هذا التغير عشوائى . وبذلك نجد انفسنا من جديد ، امام دالة عشوائية فى الزمن .




شكل ١٨

واذا حسبنا الان القدرة اللازمة لتشغيل ١٠ او ٢٠ ماكنة ، لا ماكنة واحدة فقط ، فان التغيرات العنيفة المبينة فى الرسم ، تصبح تغيرات انسيابية . وهنا لا تفقد القدرة الكلية اللازمة ، طابعها العشوائى ،



بل تكتسب صفة التغيرات الانسيابية. ويمكن توضيح ذلك الى حد ما ، بتطبيق نفس القاعدة التى استعملناها فى دراسة قانون الاعداد الكبيرة . وقد اوضحنا الصورة العامة لهذه الدالة العشوائية فى الشكل ١٨ . وعمليات الانسياب هذه ، تنتج من ان القدرة اللازمة لتشغيل احدى الماكنات تصل الى قيمتها العظمى ، فى الفترات التى لا تحتاج فيها الاجزاء الاخرى الى قدرة كبيرة ، بل وربما صغيرة جدا . وقد علمنا ان تشتت مجموع الكميات العشوائية المستقلة يتناسب مع $1/\sqrt{n}$ . حيث $n$ — عدد الكميات العشوائية .

وفى الوقت الحاضر تعتمد ابحاث الطاقة الكهربائية اللازمة للمؤسسات الصناعية وكذلك لشبكات الانارة فى المدن ، على ما اوضحناه من الخواص . ولهذا السبب بالذات ، نستعمل فى هذه الابحاث ، الطرق والمفاهيم الرياضية لنظرية الاحتمالات ونظرية العمليات العشوائية ( اى نظرية الدوال العشوائية ذات المتغير المستقل الواحد ) .

## ٣٤ ـ مفهوم العمليات العشوائية ـ عمليات ماركوف العشوائية

نستطيع الان اعطاء تعريف لما اسميناه بالعمليات العشوائية . لنتصور ان الكمية العشوائية $\xi(t)$ تعتمد على البارامتر الذى يتغير تغيرا مستمرا . ويكون هذا البارامتر عادة عبارة عن الزمن ، ولو انه يمكن فى الحقيقة ، اعطاء هذا البارامتر اى معنى آخر . ولكن هذا البارامتر فى اغلب الحالات ، يعبر عن الزمن فعلا .

ولاعطاء العملية العشوائية ، لا يكفى ان نعلم كيف نصف القيم التى تأخذها هذه العملية فى كل لحظة . بل يجب ان نصف ايضا التغير المتوقع لهذه القيم ، وكذلك احتمال التغيرات المتوقعة لهذه

العملية مع مرور الزمن ومقدار اعتماد التطور الحاضر لهذه العملية على شكلها السابق . وبدون ذلك ، لا نستطيع مطلقا ، ان نتحدث عن معلومية العملية العشوائية . وتتلخص الطريقة العامة لتعريف العمليات العشوائية رياضيا فى التالى : لاية قيمة صحيحة موجبة لعدد $n$ ولاية مجموعة لحظات زمنية $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ تعتبر الدوال التالية معلومة :

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n\}$$

وهذه الدوال تساوى احتمالات تحقق المتباينات $\xi(t_i) < x_i$ فى آن واحد لجميع لحظات الزمن المختارة $t_i$ حيث $i = 1, 2, \ldots, n$.

وتعتبر طريقة تعريف العمليات العشوائية التى ذكرناها الان ، طريقة شاملة . وتسمح مبدئيا ، بمعرفة جميع خواص تطور هذه العمليات مع مرور الزمن . ولكن هذه الطريقة صعبة جدا . ولذلك فللحصول على نتائج ادق واهم ، نضطر الى البحث عن طرق اخرى ، والى تحديد عمليات عشوائية هامة ذات صور خاصة ، والبحث بالنسبة لها عن افضل طرق التحليل التى تساعد على ايجاد الحسابات ووضع الاسس الرياضية للظواهر التى ندرسها . وانطلاقا من وجود انواع مختلفة من العمليات الفعلية ، فقد حددت فى الوقت الحاضر بعض مجموعات من هذه العمليات التى قطع شوط كبير فى دراستها . ولدراسة هذه العمليات حدث تطور كبير فى الرياضيات اخرجها عن حدود المعلومات الرياضية البسيطة . ولذلك فاننا سنكتفى هنا بالتطرق الى بعض النتائج ولن نتوقف عند شرح طرق الحل . وفى اغلب الحالات لن نستطيع كتابة العلاقات فى صورتها الرياضية الاخيرة . بل سنوردها بالكلمات فقط .



ومن بين المجموعات المختلفة للعمليات العشوائية تحتل العمليات المسماة بعمليات ماركوف مكانا هاما . ( وقد سميت باسم عالم الرياضيات الروسى الشهير ماركوف الذى عاش فى نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين ) لقد كان ماركوف اول من اهتم واخذ بدراسة خواص ما يسمى بالاعتمادات المتسلسلة التى كانت اساس انشاء مفهوم نظرية عمليات ماركوف العشوائية .

لنفرض ان العملية $\xi(t)$ تحقق الشرط التالى : بالنسبة لاية لحظتى زمن $t_0$ و $t$ حيث $t_0 < t$ ، فان احتمال الانتقال من الحالة $x_0$ فى اللحظة $t_0$ الى الحالة $x$ (او الى احدى الحالات المكونة لمجموعة ما $A$ ) فى اللحظة $t$ ، يعتمد فقط على $t_0, x_0, t, x$. ان لمثل هذه العمليات يكون تاريخ تطورها وكأنه يتركز فى الحالة $x_0$ التى حدثت فى اللحظة $t_0$ ، ويؤثر فى تطورها التالى فقط من خلال $x_0$ . وهذه العمليات بالذات تسمى بعمليات ماركوف .

يظهر لاول وهلة ان هذه الشروط الدقيقة لتتابع الظواهر والتى نفرضها على عمليات ماركوف ، تجعلها بعيدة عن المتطلبات الحقيقية . لان تأثير التاريخ السابق فى العمليات الطبيعية يستمر عادة مدة طويلة .

الا ان الخبرة المتكدسة من استخدام الرياضيات وتطبيقاتها فى مجالات علوم البيولوجيا والتكنيك والفيزياء وسائر مجالات المعرفة ، توضح بالتاكيد ، ان ظواهر كثيرة مثل ظاهرة الانتشار او التحكم بالانتاج الالى ، تدخل وبصورة قوية ــ ضمن نطاق تركيب عمليات ماركوف . وعلاوة على ذلك ، اتضح انه يمكن تحويل اية عملية عشوائية الى عمليات ماركوف وذلك بتغيير مفهوم الحالة . ويعتبر هذا العامل حجة قوية فى صالح التطور الواسع لنظرية عمليات

ماركوف . وتستخدم هذه الملاحظة على نطاق واسع فى دراسة مسائل عملية كثيرة ، ذلك لانه من اجل دراسة عمليات ماركوف يمكن استخدام الطرق التحليلية المدروسة جيدا فى الحسابات والاستنتاجات الرياضية .

نضيف الى ذلك ، ان اية طريقة بحث رياضية تستخدم فى دراسة هذه الظاهرة او تلك من الظواهر الطبيعية او التكنيكية او الاقتصادية او العمليات السيكولوجية ، تتطلب تقنينا مسبقا لهذه العمليات ، واظهار الخواص المميزة لها اثناء تطورها ، تلك الخواص التى تكفى تماما لوصف هذا التطور .

ومن الامور الاعتيادية ، ان اصبح الحديث الان يجرى عن الجدولة او التبويب ، لا عن التقنين . وتحمل الجدولة التى نضعها بانفسنا بعض الخواص التى تسهل عملية دراستها . فهى اولا اسهل وثانيا يمكن ان يصاغ لها بدقة الوضع الابتدائى وكذلك شروطها ، الامر الذى لا يحدث فى العمليات الفعلية ، وخاصة فى الظواهر الاقتصادية والبيولوجية .

ويمكن الحكم على نوعية الجدولة وادخال التحسينات عليها ، اذا لزم الامر ، وذلك بتطبيق الظاهرة على جدولة سهلة نوعا ما ، ثم مقارنة النتيجة بنتائج مشاهدات نفس الظاهرة . وعند انشاء الجدولة الرياضية يفترض ضمنا ، انه يمكن تطبيق التحليل الرياضى فى دراسة عملية تغير مجموعة ما فقط فى حالة ما اذا افترضنا انه يمكن وصف كل حالة ممكنة وتطورها ، عن طريق اختيار وسيلة رياضية معينة .

ولعل ميكانيكا نيوتن ، تعتبر واحدة من احسن الجدولات الرياضية للظواهر ذات الطابع الخاص ، التى تحيط بنا .



والجدولة البسيطة لتطور العمليات وما يرتبط بها من الوسائل الرياضية كحساب التفاضل والتكامل التقليدى ، كانت تصف عمليات عديدة بدقة ، منذ مئتين وخمسين عاما . والنجاحات التى تمت فى صناعة بناء الماكينات ، وفى طيران محطات الفضاء الاولى ليس فقط بالقرب من الارض ، بل والى الاجرام السماوية الاخرى . يعود الفضل فيها الى حد كبير ، الى التطبيق الواسع لميكانيكا نيوتن . ففى ميكانيكا نيوتن ، يفترض انه يمكن وصف حركة مجموعة النقط المادية وصفا تاما بواسطة معرفة موضع وسرعة كل نقطة . او بمعنى آخر . اذا اعطينا هذه القيم فى اللحظة $t_0$ . يمكن عندئذ حساب حالة مجموعة النقط المادية فى اية لحظة زمن اخرى والحصول على نتيجة واحدة . ولهذا الغرض ، تعطينا الميكانيكا معادلات الحركة .

ونلفت النظر الى انه اذا قصدنا بحالة مجموعة النقط ، موضعها فقط فى اللحظة $t$ ، فان مفهوم الحالة هذا يصبح قاصرا ولا يكفى لاعطاء تعريف للحالات التالية للمجموعة . ولذلك يجب ان يتسع مفهوم الحالة فى ميكانيكا نيوتن باضافة قيمة السرعة فى كل لحظة .

وبخلاف الميكانيكا التقليدية وخاصة فى الفيزياء الحديثة كلها . نضطر الى تناول وضع اكثر تعقيدا عندما لا نستطيع بمعرفة حالة المجموعة فى لحظة معينة ، تحديد نفس حالة المجموعة هذه بشكل وحيد . وبالنسبة لعمليات ماركوف يعرف تعريفا وحيدا فقط ، احتمال الانتقال من حالة الى اخرى خلال فترة زمنية معينة . واذا رغبنا ، فانه يمكن اعتبار عمليات ماركوف كتعميم واسع للعمليات التى تتناولها الميكانيكا التقليدية .

## ٢٥ – ابسط سلسلة حوادث

فى حالات عملية كثيرة ، وكذلك فى بعض الحالات ذات الاهمية الخاصة ، نضطر الى تفسير طريقة تتابع ظهور نوع معين من الحوادث ، مثل وصول البواخر الى ميناء بحرى ، ظهور خلل فى عمل جهاز معقد ، تغيير المصابيح الكهربائية المعطوبة ، ظهور تقطع فى خيوط ماكينة الغزل ، تسجيل لحظات انشطار ذرات مادة مشعة ، وغيرها. ان حسابات كثير من مؤسسات الخدمات العامة ( محلات الحلاقة ، كمية سيارات المواصلات العامة وعدد السرائر اللازمة فى المستشفيات ، مقدار تحمل الممرات او الجسور لتدفق وسائط النقل وغيرها ) ترتبط بدراسة هذا النوع من سلاسل الحوادث الى حد بعيد .

ولقد اجريت فى السنوات الاخيرة دراسة دقيقة لوصول الطائرات الى المطارات الكبيرة ولوصول السفن التجارية الى موانئ التفريغ وتتابع طلبات الاغاثة على مراكز الاسعاف الطبية وتتابع مكالمات المشتركين التليفونية على مراكز الهاتف . . . . وغيرها . واتضح من نتائج هذه المشاهدات انه – فى اغلب هذه الحالات وبتقريب جيد الى حد كبير – يمكن وصف ظهور هذه الحوادث بهذه الطريقة :

لنرمز الى الفترة الزمنية التى تهمنا دراستها بـ $t$ . ولنفرض ان $P_k(t)$ هى احتمال ظهور $k$ من هذه الحوادث خلال هذه الفترة ، عندئذ ، وعندما تكون $k=0,1,2 . . . . . . . .$ تتحقق العلاقة التالية بدقة كبيرة

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (1)$$



حيث $\lambda$ – مقدار ثابت موجب يعبر عن « كثافة » وقوع حوادث السلسلة . وفى الحالة الخاصة ، فان احتمال عدم وقوع حادثة من حوادث السلسلة خلال فترة زمنية يساوى

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

وفى الفيزياء الجزيئية تدرس المسألة التالية : اوجد احتمال الا يتصادم جزئ معين مع الجزيئات الاخرى خلال فترة زمنية محددة $t$ . ان كتب الفيزياء التى تتعرض لهذه المسألة، توضح ان هذا الاحتمال يساوى $e^{-\lambda t}$ . ونلاحظ انه اذا عرفنا فى هذا المثال لحظات تصادم جزئ معين مع الجزيئات، على انها تكون سلسلة من الحوادث، فاننا فى هذه الحالة ، نحدد احتمال عدم وقوع اية حادثة من حوادث السلسلة فى خلال فترة زمنية طولها $t$ . ومن الطبيعى ان نفترض ان هناك سببا عاما يؤدى الى وجود قاعدة واحدة ، تتحكم فى حدوث ظواهر مختلفة فى طبيعتها اختلافا تاما . واتضح فى واقع الآمر ، ان هناك اسسا متينة مختلفة . وفى الحالة العامة جدا ، تنطبق عليها هذه القاعدة التى شرحناها توًا .

فى اوائل هذا القرن اكتشف عالما الفيزياء المشهوران اينشتاين وسمولوخوفسكى ، اولى مجموعات هذه الشروط او الاسس ، وذلك اثناء دراسة الحركة البراونية .

نفرض ان سلسلة الحوادث التى نبحثها تحقق الشروط الثلاثة التالية :

١ – الاستقرار ( الثبات ) :

بالنسبة لاية مجموعة نهائية العدد من الفترات الزمنية غير المتقاطعة ، يعتمد احتمال ظهور $k_1, k_2, . . . . . . . , k_n$ من الحوادث خلال هذه الفترات على التتابع على هذه الاعداد وطول هذه الفترات فقط .

وفى الحالة الخاصة ، فان احتمال ظهور $k$ حادثة فى الفترة الزمنية $(T, t+T)$ لا يعتمد على $T$ وانما يعتبر دالة فى $k$ و $t$ فقط .

٢ ــ انعدام التأثير المتتابع :

تعنى هذه الخاصية . ان احتمال ظهور $k$ حادثة من حوادث السلسلة خلال فترة زمنية $(T, T+t)$ لا يعتمد على عدد الحوادث التى ظهرت قبل هذه الفترة او كيفية ظهورها . وتعنى هذه الخاصية ، ان السلسلة التى ندرسها هى سلسلة ماركوف للحوادث .

٣ ــ الوحدانية :

تعنى هذه الخاصية انه عمليا ، يستحيل ان تظهر حادثتان او اكثر فى فترة زمنية قصيرة جدا .

وتسمى سلسلة الحوادث التى تحقق هذه الخواص الثلاث ، « ابسط سلسلة حوادث » .

ويمكن اثبات ان ابسط سلسلة حوادث ، تعين من العلاقة (1) . وكذلك يمكن تعريف ابسط سلسلة حوادث بطريقة اخرى . وهى باعتبار انها سلسلة لحظات زمنية ، طول المسافة بينها عشوائى . فى هذه الحالة يعين احتمال ان يكون طول الفترة بين نقطتين متجاورتين اكبر من $t$ بالعلاقة (2) . وكثيرا ما يستعمل هذا التعريف لابسط سلسلة حوادث ، فى حل مسائل نظرية وعملية عديدة .

ويصعب اجراء الاختبار المباشر للتحقق من وجود الشروط الثلاثة السابقة ، الاستقرار ، انعدام التأثير المتتابع والوحدانية ، فى حالات عدّة . ولذلك ، فانه من المهم جدا ان نجد شروطا اخرى تسمح ــ بالاعتماد على اسس اخرى ــ باستنتاج ان سلسلة الحوادث هى ابسط سلسلة او قريبة من ابسط سلسلة. وقد وجدت هذه الشروط فى ابحاث بعض العلماء ، وهى تتلخص فى التالى :



نفرض ان السلسلة التى نبحثها عبارة عن مجموع عدد كبير جدا من السلاسل المستقرة المستقلة عن بعضها بحيث ان كل سلسلة منها تؤثر على المجموع تأثيرا طفيفا . وتعتبر السلسلة الكلية قريبة من ابسط سلسلة ، وذلك بوضع شروط اضافية عليها تحمل طابعا حسابيا يضمن شرط وحدانية السلسلة الكلية .

وقد اثبت هذه النظرية فى الحالة العامة، العالم السوفييتى خنتشين، وهو احد العلماء الذين وضعوا اساس نظرية الاحتمالات الحديثة . ولهذه النظرية ، اهمية كبيرة فى تطبيقات نظرية الاحتمالات .

ففى الواقع ، كثيرا ما تساعدنا هذه النظرية على الحصول على نتائج هامة من الشكل العام لسلسلة الحوادث التى تهمنا . مثلا ، بما ان سلسلة الطلبات التى تصل الى مراكز الهاتف يمكن ان تدرس كمجموع عدد كبير من السلاسل المستقلة تؤثر كل سلسلة منها تأثيرا طفيفا على المجموع الكلى ، فانه يجب ان تكون السلسلة قريبة من ابسط سلسلة . وبالمثل ، فان سلسلة سفن النقل التى تصل الى ميناء بحرى معين تتكون من عدد كبير من السلاسل التى انطلقت من موانىء متعددة اخرى . ويمكن ان نتوقع ان هذه السلسلة كذلك قريبة من ابسط سلسلة ، وهذا ما يحدث بالفعل . وبالامكان ان نستمر فى ايراد الامثلة التى لها طابع عملى آخر .

## ٣٦ ــ احدى مسائل نظرية الطوابير *(Theory of Queues)*

تعتبر المسألة التى سندرسها الان. مثالا قياسيا لحالات عملية عديدة وهامة . وسندرس فى هذا البند . احدى طرق العرض الهامة لهذه المسألة . كما سنشرح طريقة العرض هذه بشكل عملى بحث

وذلك كما تظهر امام الباحث فى المصنع او المحلات التجارية او فى المخازن او فى تخطيط الشبكات الهاتفية .

ثمة بعض المؤسسات — صالونات الحلاقة ، مراكز الهاتف ، المستشفيات ، عيادات علاج الاسنان وغيرها ، تقدم الخدمات للجماهير . وتتوارد الطلبات فى لحظات عشوائية من الزمن ، وكذلك يكون طول مدة تنفيذ هذه الطلبات عشوائيا ايضا . وهنا يبدر تساؤل : كيف ستتم عملية القيام بهذه الخدمات اذا جهز محل خدمة ؟

من الواضح ان الشروط التى ذكرناها فى هذه المسألة تعكس الحالة العملية . ففى الواقع ، لا يمكننا التنبؤ بلحظات توارد الاشخاص على صالون الحلاقة او على عيادة الاسنان مسبقا . ونعلم جيدا اننا كثيرا ما نضطر للانتظار ، حتى يحين دورنا لتلقى الخدمة المطلوبة . واحيانا نتلقى هذه الخدمة فورا وبدون انتظار ، واتضح كذلك ، ان القيام بنفس العملية يتطلب اوقاتا مختلفة اختلافا كبيرا . فعند علاج السن مثلا . فان الطبيب اعتمادا منه على حالة السن يمكن ان يكتفى بتنظيفها او يضطر لتغيير الدواء ، واحيانا قد يحشو الضرس فورا وفى اول مراجعة .

ومن الطبيعى ان خواص ونوعية الخدمات ، تهم الزبائن ، وكذلك تهم المشرفين على هذه المحلات بالدرجة الرئيسية . فمثلا طول الطابور لتلقى الخدمات : كم من الوقت « فى المتوسط » يضطر الزبون لانتظار بدء خدمته ؟ ما هو مقدار العمل ( الضغط ) الذى يقع على جهاز الخدمة اذا علمنا سرعة توارد الطلبات على الخدمة فى المتوسط ، واذا علمنا كذلك متوسط سرعة الخدمة ؟ ان نجاح عمليات الخدمات يتوقف على الاجابة الصحيحة على هذه الاسئلة .



للاجابة على هذه الاسئلة سننطلق من الفروض التالية :

١ — سلسلة الطلبات على الخدمة تعتبر ابسط سلسلة .

٢ — طول مدة الخدمة عشوائى ، واحتمال ان تأخذ الخدمة وقتا لا يقل عن $t$ يساوى $e^{-\nu t}$ حيث $\nu>0$ وثابتة .

٣ — كل طلب يخدمه جهاز واحد ، وكل جهاز يخدم اثناء اللحظة التى يكون فيها مشغولا ، طلبا واحدا فقط .

٤ — اذا وجد طابور على الخدمة ، فان الجهاز الذى يخدم يبدأ فى خدمة الطلب التالى فى الطابور ، فور انتهائه من تنفيذ الطلب السابق وبدون ضياع وقت . نرمز الى احتمال وجود $k$ من الطلبات فى الطابور فى اللحظة الزمنية $t$ بـ $P_k(t)$ وتحت الشروط التى وضعناها ، يمكن ايجاد هذا الاحتمال لاية قيمة لـ $k$ ، حيث $k=0,1,2, \ldots$ غير ان العلاقات الدقيقة معقدة وكبيرة جدا . ولذلك يفضل فى التطبيق العملى ، عدم استخدام مثل هذه العلاقات بل تستخدم تلك العلاقات التى نحصل عليها من العلاقات الدقيقة بالنسبة لنظام العمل المستقر . وبدون اية مقارنة ، فان العلاقة الاخيرة ابسط بكثير وتأخذ الصورة الاتية :

عندما تكون $1 \leqslant k < n$

يكون الاحتمال

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \qquad (3)$$

وعندما تكون $k \leqslant n$ يكون لدينا

$$p_k = \frac{\rho^k}{n!\, n^{n-k}} p_0 \qquad (4)$$

وعندما تكون $\rho < n$

فان

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1} \qquad (5)$$

وعندما تكون $\rho \geqslant n$ فان $p_0=0$

ولقد فرضنا فى هذه المعادلات ان $\rho=\frac{\lambda}{\nu}$

ونلفت النظر الى ان الأحتمال $p_0=0$ عندما تكون $\rho \geqslant n$ .

ووفقا للمعادلتين (3) و (4) يتضح كذلك انه عندما نأخذ اى $k \geqslant 1$ فان $p_k=0$ . وبكلمة اخرى ، عندما تكون $\rho \geqslant n$ فى العملية المستقرة للخدمة ، فاننا نستطيع ان نجد فى المجموعة اى عدد لا نهائى من الخدمات ، باحتمال يساوى صفرا . وهذا يعنى انه باحتمال مقداره واحد صحيح سيكون فى هذه المجموعة عدد لا نهائى من الطلبات اى سيكون هناك طابور لانهائى . ويعنى هذا عمليا ، الآتى :

فى كافة الحالات التى تكون فيها $\rho \geqslant n$ ، فان طابور الخدمة يزداد بلا حدود مع مرور الزمن . ولنتيجتنا هذه ، اهمية عملية كبيرة جدا . ذلك لانه عند حساب الكمية الضرورية من وسائل الخدمة مثل : عدد ساحات هبوط الطائرات فى المطار ، عدد المراسى فى ميناء بحرى ، عدد الاسرة فى مستشفى ما ، عدد مراكز تسليم ادوات العمل فى مؤسسة ما ، عدد اكشاك البيع فى مخزن ما ، وغيرها . ننطلق من فرض خاطئ ، ذلك لاننا ننطلق من مثالية انتاجية مجموعة ما تساوى نسبة حاصل ضرب عدد الاجهزة التى تعمل طول مدة استخدامها خلال المدة المطلوبة ، الى متوسط طول مدة عملية واحدة من عمليات الخدمة . وينتج هذا الحساب من النتيجة التى ذكرناها اعلاه ، ووفقا لعدم وصول طلبات الخدمة بصورة منتظمة ، ولتنظيم



الطوابير . وهذا يؤدى بدوره الى اضاعة الوقت والوسائل والامكانية الذاتية للزبائن .

ومن الواضح ان المقدرة على استخدام نظرية الطوابير لا تؤدى فقط الى اننا نحصل على وسيلة لمعرفة ذلك الضرر الذى يحدث بسبب زيادة طلبات مجموعة الخدمات ، بل ولمعرفة تلك الخسائر التى تقع بسبب زيادة كمية وسائل الخدمة فى المجموعة . ويمكن ان نورد عددا كبيرا من الامثلة تبين ان نظرية الطوابير اصبحت فرعا ضروريا من اجل اجراء الحسابات اللازمة فى الميادين الضخمة الهامة التى يقوم بها الانسان . ومثال ذلك : مراكز الهاتف ، تنظيم الفرق العمالية للتصليح فى المؤسسات ، عمل المطارات الضخمة ، عمل انفاق السيارات التى تكثر فيها الحركة .

وفى الوقت الحاضر تصبح لنظرية الطوابير اهمية كبيرة فى حل المسائل المتعلقة بتصميم الآلات الالكترونية الحاسبة الحديثة ، ومسائل الفيزياء النووية والبيولوجيا .

## ٢٧ ـ حول احدى مسائل نظرية الكفاءة

فى السنوات الاخيرة ، جذب انتباه العلماء والباحثين فى جميع انحاء العالم احد الفروع الحديثة فى العلم ، وهو ما يسمى بنظرية الكفاءة . ويتلخص هدف هذا الفرع ، فى ايجاد قواعد عامة لاتباعها فى مجالات التخطيط ومجالات الانتاج ، والاستقبال ، والمواصلات والتخزين واستخدام قطع الغيار فى الصناعة لضمان اعلى كفاءة .

ومن الطبيعى ، ان نظرية الكفاءة تطور طرق حساب كفاءة الاجهزة المعقدة ، وكذلك المجموعات الميكانيكية بمعلومية مميزات كفاءة كل من عناصرها .

وليس هناك شك فى الاهمية العملية لهذه المسائل ، باعتبار ان جميع مجالات الحياة العملية مرتبطة ارتباطا مباشرا او غير مباشر باستخدام الاجهزة والمجموعات الميكانيكية المختلفة . ففى كل يوم نستعمل الترام والاوتوبيس اثناء ذهابنا الى العمل ، او نستعمل مفتاح النور الكهربائى فى منازلنا ، وصنابير المياه الموصلة بانابيب تدفع فيها مياه بواسطة ماكينات على بعد منا . وفى المستشفيات تستعمل اجهزة مختلفة تساعد على اعادة الحياة الطبيعية للاعضاء المختلفة للمرضى . فبعد عمليات الكلية مثلا يستعمل الآن جهاز خاص ككلية صناعية يقوم بعمل الكلية الطبيعية اثناء فترة استعادة الكلية المريضة لخواصها المعتادة . وفى كل عام تنقل الطائرات مليارات المسافرين الى جميع انحاء العالم . فى جميع هذه الحالات يهمنا جدا ان تقوم الاجهزة الميكانيكية المستعملة طوال مدة استخدامها بالعمليات المخصصة لها . فقد يؤدى عدم تحقق هذا الغرض الى عواقب لا يمكن تلافيها . فمن الطبيعى ، ان توقف محرك الطائرة اثناء طيرانها يؤدى الى مقتل المسافرين والطيارين . وقد يؤدى تعطل الكلية الصناعية الى وفاة المريض بعد اجراء عملية الكلية له بنجاح . ويؤدى تعطل ماكينات ضخ المياه فى المحطات الى توقف امداد السكان بالمياه ، مما يؤدى الى عدم امكانية طهى الطعام او شرب المياه والاستحمام ، وتضطر المستشفيات الى ايقاف العمليات الجراحية ، وترتبك عمليات العلاج بها ، وتمتلئ الشوارع بالاتربة حيث لن تكون هناك مياه لرشها .

وقد يخطر على الذهن ان جميع هذه المسائل ليست لها اية علاقة بنظرية الاحتمالات ، ويقع حلها على عاتق المهندسين والمصممين والعمال فى المصانع ، والمستهلكين . ولكن هذا ليس صحيحا . اذ يقع على عاتق المشتغلين بالرياضيات حل جزء كبير من المسائل



التى تتعلق ببحث النواحى الكمية للحسابات ، واختيار افضل الطرق لاختبار نوعيه الآلات والحصول على النتائج النهائية للاختبارات التى نجريها ، وحساب المدة المثلى لاجراء عمليات الفحص والتصليح وغيرها. وقد اتضح ان الخواص الاساسية للاجهزة والتى لها دور كبير فى اداء عملها ، تحمل طابعا احتماليا . وعلى سبيل المثال ، فان طول فترة العمل المتواصل لنفس الاجهزة المصنوعة فى نفس المصنع ومن نفس المواد الخام ، تختلف فيما بينها اختلافا كبيرا . ونستطيع ان نتحقق من ذلك بانفسنا اذا ما تذكرنا مدى اختلاف فترات عمل المصابيح الكهربائية من وقت اضاءتها حتى وقت القائها فى سلة المهملات : اننا نعلم كذلك ، ان المصباح يظل صالحا للاستعمال احيانا سنوات عديدة واحيانا يحترق فى خلال ايام قليلة من بدء استعمالها . وقد اكدت لنا المشاهدات الطويلة والتجارب الخاصة العديدة اننا لا نستطيع بالضبط تحديد فترة صلاحية الجهاز ( او القطعة ) للعمل ، لكننا نستطيع تحديد احتمال ان يظل الجهاز صالحا للعمل لفترة لا تقل عن زمن معين $t$ . وبناء على ذلك ، فان نظرية الاحتمالات تستعمل الى حد كبير فى جميع مسائل نظرية الكفاءة وتعتبر واحدة من اهم طرق حل مسائل هذه النظرية .

لننتقل الان الى دراسة احدى المسائل السهلة العرض والحساب فى نفس الوقت . سنحاول عرض هذه المسألة بطريقة سهلة وفى نفس الوقت نوضح معناها الطبيعى والعملى .

نعلم جيدا انه ليس هناك فى الطبيعة عناصر او اجهزة مطلقة الكفاءة . ومهما كانت خواص مكونات اى جهاز ، فانها تتناقص مع الزمن . وتستعمل وسائل مختلفة لزيادة كفاءة الجهاز ، مثل تسهيل ظروف الاستخدام ، وذلك بالبحث عن مواد اكثر فعالية او طرق

تصميم او توصيل جديدة . وتعتبر « الاحتياطية » من اهم الطرق المنتشرة لزيادة الكفاءة . وتتلخص اهمية الاحتياطية فى وضع اجهزة اضافية او قطع غيار او حتى وحدات باكملها تكون مستعدة دائما للعمل اذا ما تعطلت اية قطعة من القطع الاساسية . فلكى لا تتعطل المواصلات فى السكك الحديدية مثلا ، يحتفظ بقاطرة عادية او كهربائية كاحتياط فى جميع المحطات الرئيسية . وفى محطات توليد الكهرباء الضخمة يحتفظ دائما بمولد احتياط للتيار الكهربى . وعلى الخطوط الرئيسية لتوصيل الكهرباء يستخدم خطان متوازيان . بحيث لا يعملا بكامل طاقتيهما فى الظروف العادية . ويحتفظ فى كل سيارة بعجلة خامسة احتياطية الى جانب العجلات الاربع الاخرى العاملة .

نفرض ان لدينا $n$ جهازا لا بد ان تعمل فى نفس الوقت لمدة مقدارها $t$ . واحتمال ان يعمل اى من هذه الاجهزة بدون تعطل طيلة هذه الفترة ، يساوى $p$ ( هذا الاحتمال واحد لجميع الاجهزة ) وان اى جهاز يمكن ان يتعطل بدون الاعتماد على الاجهزة الاخرى . وان تعطل ولو واحد من هذه الاجهزة ، يؤدى الى تعطل المجموعة كلها . ( مثلا انفجار احدى عجلات السيارة يؤدى الى تعطل السيارة نفسها ) . ان احتمال ان تعمل المجموعة بلا تعطل يساوى حسب علاقة برنولى المقدار $p^n$ . الى اى مدى يتغير احتمال ان تعمل المجموعة بلا توقف ، اذا ما ادخلنا $m$ من الاجهزة الاحتياطية بجانب الـ $n$ من الاجهزة الاساسية . وذلك بفرض ان الجهاز الاحتياطى فى حالة ساخنة ( وهذا يعنى ان الجهاز الاحتياطى موجود فى نفس ظروف الجهاز الاساسى ) ؟

تعتبر المجموعة فى حالة تعطل اذا ما اصبح عدد الاجهزة العاملة او الجاهزة للعمل اقل من $n$ . ومن قاعدة جمع الاحتمالات يكون الاحتمال المطلوب مساويا

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m+n}{n+i} p^{n+i} (1-p)^{m-i}$$



وسنشرح الآن النتيجة التى حصلنا عليها بواسطة امثلة عددية بسيطة .

نفرض أن $n=4,\ m=1,\ p=0{,}9$ ، وبدون اية صعوبة ، يمكن استنتاج ان احتمال ان تعمل المجموعة ( بدون الاجهزة الاحتياطية ) بدون توقف يساوى ٦٥٦١ر٠ اما اذا ادخلنا فى المجموعة جهازا احتياطيا ، فان هذا الاحتمال يصبح ٩١٨٥ر٠ . وبناء على ذلك فان ادخال جهاز احتياطى واحد فى مجموعة مكونة من اربعة اجهزة اساسية من نفس النوع يزيد احتمال عدم توقفها بمقدار مرة ونصف تقريبا . اما اذا ادخلنا جهازين احتياطيين ، فان هذا الاحتمال يصبح مساويا ٩٨٤١ر٠ . ومن هنا نرى ان ادخال مولد كهربائى احتياطى واحد فى المحطة الكهربائية يضمن الى حد بعيد، استحالة تعطل هذه المحطة .

وتتضاعف كفاءة المجموعة ذات الاجهزة الاحتياطية مرات كثيرة اذا ما استخدمنا ما يسمى بالاحتياطية مع التصليح . اى ان تصليح الجهاز المتعطل يبدأ فور توقفه ؛ وعند نهاية تصليحه يدخل كجهاز احتياطى فى المجموعة . بهذه الطريقة يمكن مضاعفة كفاءة المجموعة مرات كثيرة . وقد درسنا هنا مسألة واحدة مبسطة جدا من مسائل نظرية الاحتياطية . وتتطلب دراسة مثل هذه المسائل ، وسائل رياضية اكثر تعقيدا . ومن بينها تأتى نظرية العمليات العشوائية فى المرتبة الاولى . وقد توصل الباحثون الان الى حل مسائل عديدة فى نظرية الكفاءة . ولكن بعض هذه المسائل ما زال بعيدا عن الحل النهائى المرضى . الا ان العمل المتواصل ، سيسمح بحل هذه المسائل تحت شروط مبسطة الى حد ما ؛ وفى نفس الوقت ، ستفتح طرق الحل هذه ، الباب امام حل المسائل فى صورتها القريبة من الواقع .

## الخاتمة

اصبحت نظرية الاحتمالات فى السنوات العشر الاخيرة احد فروع علم الرياضيات التى تتقدم بخطى سريعة . فالنتائج النظرية الجديدة ، تفتح الباب امام امكانية استخدام طرق نظرية الاحتمالات فى التطبيقات النظرية والعملية . وبدقة اكثر ، فان الدراسة الدقيقة والمفصلة للظواهر الطبيعية ، وللعمليات الانتاجية والتكنيكية والاقتصادية ، تدفع المشتغلين بنظرية الاحتمالات الى البحث عن طرق وقواعد جديدة اثناء هذه الدراسات . وتعتبر نظرية الاحتمالات من احد فروع علم الرياضيات التى لا تنفصل عن الحياة ولا عن متطلبات العلوم الاخرى . وهى تساير ركب التطور فى العلوم الطبيعية والتكنيكية . ولا يجب ان يخطئ القارئ حول ما ذكرناه ، ويظن ان نظرية الاحتمالات قد تحولت الان فقط ، الى وسيلة تساعد على حل المسائل التطبيقية .

ان هذا ليس صحيحا مطلقا . اذ ان نظرية الاحتمالات قد تحولت فى الاربعين سنة الاخيرة الى فرع من فروع علم الرياضيات قائم بذاته ، له مشاكله وطرق ابحاثه الخاصة .

وفى نفس الوقت اتضح ان حل المسائل الملحة فى الطبيعة ، يعتبر من اهم المشاكل التى تستحوذ على اهتمام المشتغلين بنظرية الاحتمالات ، كاحد فروع علم الرياضيات .



لقد ظهرت نظرية الاحتمالات فى منتصف القرن السابع عشر . وارتبط ظهورها باسماء كثيرة مثل فيرما ( ١٦٠١ — ١٦٦٥ ) وبسكال ( ١٦٢٣ — ١٦٦٢ ) وهيجنز ( ١٦٢٥ — ١٦٩٥ ) . فقد ظهرت بشكل اولى ، ابحاث هؤلاء العلماء حول مفاهيم احتمال وقوع الحادثة العشوائية والقيمة المتوسطة للكمية العشوائية . وقد كانت المسائل المتعلقة بالعاب القمار هى نقطة الانطلاق فى ابحاثهم . الا ان اهمية هذه المفاهيم فى دراسة الظواهر الطبيعية كانت واضحة لهم تماما . فقد كتب هيجنز فى مقالته عن « الحسابات فى العاب القمار » يقول «وعلى القارئ ان يلاحظ انه ليس امام لعبة . ولكن الامر يتعلق بنظرية هامة وعميقة » . ومن بين العلماء الذين اتوا بعدهم والذين كان لهم فضل كبير فى تطوير نظرية الاحتمالات يجدر بنا ان نذكر برنوللى ( ١٦٥٤ — ١٧٠٥ ) . وقد قابلنا هذا الاسم فى هذا الكتاب ، وكذلك موافر ( ١٦٦٧ — ١٧٥٤ ) ، بييس (الذى توفى عام ١٧٦٣) ، لابلاس ( ١٧٤٩ — ١٨٢٧ ) ، جاوس ( ١٧٧٧ — ١٨٥٥ ) وبواسون ( ١٧٨١ — ١٨٤٠ ) .

ويرتبط التطور الهائل فى نظرية الاحتمالات ، بتقاليد ومنجزات العلوم فى روسيا ارتباطا وثيقا . ففى القرن الماضى ، عندما وصلت نظرية الاحتمالات فى الغرب الى حالة ركود ، اكتشف العالم الروسى العبقرى تشيبيتشيف طريقة جديدة لتطويرها . وبنى دراسة شاملة لمتسلسلة الكميات العشوائية المستقلة . وقد حصل تشيبيتشيف بنفسه ومن بعده تلميذاه ماركوف وليابونوف على نتائج اساسية بواسطة هذه الطريقة ( قانون الاعداد الكبيرة ، نظرية ليابونوف ) .

وقد تعرف القارئ على نظرية الاعداد الكبيرة . اما مسألتنا التى سندرسها فيما بعد . فنتلخص فى اعطاء صورة عن موضوع آخر من

اهم موضوعات نظرية الاحتمالات ، وقد سمى بنظرية ليابونوف (وتسمى كذلك بالنظرية الاساسية للنهايات فى نظرية الاحتمالات ) .

وتتلخص اهمية هذه النظرية فى ان كمية كبيرة جدا من الظواهر الطبيعية التى تتغير عفويا ، تتتابع حسب الطريقة التالية : تخضع الظاهرة التى ندرسها لتأثير عدد هائل من الاسباب العشوائية ، ويؤثر كل من هذه الاسباب ، فى تتابع هذه الظواهر بوجه عام ، تأثيرا ضئيلا جدا فقط . ويعبر عن تأثير كل من هذه الاسباب بالكميات العشوائية $\xi_n$ ، . . . . . . . . $\xi_2$ ، $\xi_1$ ومجموع تأثيرات هذه الاسباب على حدوث الظاهرة يساوى

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_n$$

وبما ان دراسة تأثير كل من هذه الاسباب ( او بكلمة اخرى ، اعطاء دالة توزيع الكمية العشوائية ) او حتى التعداد البسيط لهذه الاسباب ، يعتبر من المستحيلات ، فانه من الطبيعى ان نلجأ الى ايجاد طرق تسمح بدراسة التأثير الكلى ، ولا تعتمد طبيعة تأثير كل منها . وهنا عجزت طرق البحث العادية عن ايجاد حل لهذه المسألة ، وكان لا بد من ايجاد طرق بديلة ، لا تقف كثرة الاسباب التى تؤثر على حدوث الظاهرة عقبة فى سبيلها ، بل وعلى العكس ، تسهل ايجاد حل للمسألة . ويجب ان تعوض هذه الطرق عن عدم معرفة كل سبب مؤثر على حدة بواسطة كبر عددها او كثرتها . وتنص النظرية الاساسية للنهايات التى قام باكتشافها اساسا . الاكاديميون تشيبيتشيف ( ١٧٩٤ – ١٨٢١ ) ، ليابونوف ( ١٨٥٧ – ١٩١٨ ) وماركوف ( ١٨٥٦ – ١٩٢٢ ) على ان الاسباب المؤثرة $\xi_n$ . . . . . . . ، $\xi_2$ ، $\xi_1$ اذا كانت مستقلة عن بعض ، وكان عددها $n$ كبيرا جدا ، وتأثير



كل منها ضئيلا بالنسبة للتأثير الكلى لها ، فان قانون توزيع المجموع $S_n$ لا يختلف الا قليلا عن قانون التوزيع المعتدل .

وسنورد مثالا على الظواهر التى تتتابع حسب الطريقة التى شرحناها اعلاه .

اذا اطلقنا من مدفع ما ، قذائف على هدف ما ، فلا مفر من انحراف نقط اصابة القذائف عن نقطة التسديد . وهذه هى ظاهرة تشتت القذائف المعروفة جيدا . حيث ان تشتت القذيفة يعتبر نتيجة من نتائج تأثير عدد كبير من العوامل المستقلة . ( مثلا عدم الدقة فى خراطيش غلاف القذيفة او فى رأس القذيفة ، الاختلاف فى كثافة المادة التى يصنع منها رأس القذيفة ، الاختلاف البسيط فى كمية البارود الموجود فى كل قذيفة ، الخطأ البسيط الذى لا تستطيع العين ان تلاحظه عند تصويب المدفع ، التغير البسيط فى حالة الجو اثناء التصويب وعوامل كثيرة غيرها ) ولكل من هذه العوامل تأثير ضئيل جدا فقط ، على مسار القذيفة . ومن نظرية ليابونوف ، ينتج انه يجب ان يخضع هذا التشتت لقانون التوزيع المعتدل .

وتؤخذ هذه الحقيقة بعين الاعتبار فى نظرية التصويب ، كما ويرجع اليها عند وضع قواعد اطلاق النار . وعند القيام ببعض المشاهدات بغية اجراء قياس ثابت طبيعى ما ، فليس هناك مفر من ان تؤثر عوامل كثيرة جدا على نتائج المشاهدات . ولا يمكن ان نأخذ بعين الاعتبار كل عامل من هذه العوامل على حدة ، وهذه العوامل هى التى تسبب الخطأ فى القياس .

وتدخل ضمن هذه العوامل ، تلك الاخطاء التى تكون موجودة فى الجهاز نفسه ، ويمكن ان تختلف بيانات الجهاز بشكل غير ملموس لاسباب مختلفة ، ترجع لحالة الجو او الحرارة او ميكانيكية الجهاز

او لاسباب اخرى . ومن ضمنها كذلك خطأ المراقب الناتج عن خواص سمعه او بصره التي تتغير بطريقة غير ملموسة ايضا باختلاف حالته النفسية او الصحية . وبناء على ذلك ، فان الخطأ الحقيقى فى القياس يكون نتيجة حدوث اخطاء كثيرة جدا ومستقلة عن بعض ، وقيمة تاثير كل منها ضئيلة جدا وعفوية . وحسب نظرية ليابونوف يمكن ان نتوقع من جديد ان يخضع الخطأ فى القياس لقانون التوزيع المعتدل .

ويمكن تعداد كثير من الامثلة المشابهة لهذه الامثلة . فموضع وسرعة الجزئ ، يحددان بدراسة عدد كبير من التصادمات مع جزيئات الغاز الاخرى ، كمية المادة المنتشرة ، اختلاف ابعاد الاجزاء الميكانيكية عن ابعاد معروفة اثناء عملية الانتاج بالجملة ، توزيع نمو الحيوانات والنباتات ، او اى من اعضائها ، وغيرها .

وقد وضع اتقان الاحصاءات الطبيعية وكذلك بعض فروع التكنيك ، امام نظرية الاحتمالات ، عددا كبيرا من المشاكل الجديدة تماما ، التى لا تدخل ضمن اطار الطرق التقليدية . ففى الوقت الذى كان فيه عالم الفيزياء او التكنيك مهتما بدراسة العمليات ، اى الظواهر التى تتتابع مع الزمن ، لم تكن فى نظرية الاحتمالات لا طرق تناول المشاكل التى تحدث عند دراسة هذه الظواهر ، ولا طرق حلها .

وقد ظهرت الحاجة الملحة الى دراسة وتطوير النظرية العامة للعمليات العشوائية . اى النظرية التى تبحث فى الكميات العشوائية التى تعتمد على بارامتر واحد او اكثر ، وتتغير تغيرا مستمرا . وسنعدد بعض المسائل التى تؤدى الى دراسة الكميات العشوائية التى تتغير مع الزمن . لنفرض انه طلب منا مراقبة حركة جزئ ما لغاز او سائل . يصطدم هذا الجزئ فى لحظات عشوائية من الزمن مع الجزيئات الاخرى ، وبهذا يغير من سرعته واتجاه حركته . ويخضع التغير فى حالة الجزئ لتأثير



الظروف فى كل لحظة ، كما ان امكانية حساب احتمالات عدد الجزيئات التى تستطيع خلال فترة زمنية معينة ان تتحرك مسافة معينة تتطلب دراسة عدد كبير من الظواهر الطبيعية . فاذا مزجنا غازين او سائلين مثلا ، فان جزيئات كلا الغازين او السائلين ، تأخذ فى التداخل بين جزيئات الآخر ، اى تحدث عملية انتشار ، فما هى سرعة عملية الانتشار هذه ؟ وما هى القوانين التى تتحكم بهذه العملية ؟ متى يصبح الخليط الناتج من الغازين من الناحية العملية متجانسا ؟

ان نظرية الانتشار الاحصائية تعطى الاجابة على جميع هذه الاسئلة . وتعتبر الحسابات الاحتمالية اساسا لهذه النظرية . وبالطبع ، تظهر مثل هذه المسألة فى الكيمياء عند دراسة عمليات التفاعلات الكيميائية للمواد .

ما هى كمية الجزيئات التى اشتركت فعلا فى التفاعل وكيف تتطور عملية التفاعل مع الزمن ومتى تعتبر عملية التفاعل منتهية عمليا ؟

وتحدث مجموعة كبيرة من الظواهر وفقا لنظرية الانشطار الذرى . تتلخص هذه الظاهرة فى ان ذرات المادة المشعة تنشطر وتتحول الى ذرات عنصر آخر . ويحدث كل انشطار ذرى لحظيا ، وهو يشبه الانفجار المصحوب بتوليد كمية معينة من الطاقة . وقد اوضحت المشاهدات العديدة ان انشطار الذرات يحدث فى لحظات عشوائية ، ولا يعتمد اى انشطار على الآخر ( باعتبار ان كتلة المادة المشعة ليست كبيرة جدا ) . ومن المهم جدا اثناء دراسة عملية الانشطار الذرى ، ان نحدد قيمة احتمال ان يساوى عدد الذرات التى تنشطر فى فترة ما ، عددا معينا . وتعتبر هذه المسألة احدى المسائل المميزة لنظرية العمليات العشوائية .

واذا ما اقتصرنا شكليا على توضيح الصورة الرياضية للظواهر ، فبنفس الطريقة تماما ، تتم الظواهر الاخرى : الضغط الواقع على مركز الهاتف ، اى عدد المكالمات الواردة الى المركز من المشتركين . الحركة البراونية ، تقطع الخيوط فى ماكينة الغزل وظواهر كثيرة غيرها .

وقد وضع بداية نظرية العمليات العشوائية عالما الرياضيات السوفييتيان كلماجوروف ، وخنتشين فى ابحاثهما الاساسية فى بداية الثلاثينات من هذا القرن . وقبلهما بقليل اى فى السنوات العشر الاولى من القرن العشرين بدأ ماركوف بدراسة تسلسل الكميات العشوائية المرتبطة ببعضها والتى سميت بسلاسل ماركوف .

وفى عشرينيات هذا القرن ، تحولت هذه النظرية التى نشأت وتطورت فى صورة رياضية فقط ، فى ايدى علماء الفيزياء الى سلاح فعال لدراسة الطبيعة . ومنذ ذلك الوقت عمل علماء كثيرون ( بيرنشتاين ، رومانوفسكى ، كلماجوروف ، ادامار ، فريشه ديوبلن ، دوب ، فلر وغيرهم ) على تطوير نظرية سلاسل ماركوف تطويرا هائلا .

فقد وجد كلماجوروف ، وسلوتسكى ، وخنتشين ، وبول ليفى ، ارتباطا كبيرا بين نظرية الاحتمالات والفروع الرياضية التى تدرس المجموعات ، والمفهوم العام للدالة ( نظرية المجموعات ، ونظرية الدوال ذات المتغير الحقيقى ) وقد توصل باريل الى هذه الافكار فى وقت سابق قليلا . ولقد كانت لاكتشاف هذا الارتباط ، فائدة عظيمة . اذ امكن بهذه الطريقة ايجاد حل نهائى للمسائل التقليدية القديمة التى وضعها تشيبيتشيف .

واخيرا ، يجب ان نلفت الانتباه الى ابحاث بيرنشتاين ، وكلماجوروف ، وميزيس عن البناء المنطقى لنظرية الاحتمالات الذى فى استطاعته ان يحتوى على المسائل المختلفة التى تظهر فى



المجالات العلمية والتكنيكية ومجالات المعرفة الاخرى . ويلعب العلم فى الاتحاد السوفييتى والولايات المتحدة وفرنسا وبريطانيا والسويد واليابان والمجر ، دورا كبيرا فى التطور الحاضر والهائل فى نظرية الاحتمالات . وقد زاد الاهتمام بهذا الفرع من العلوم فى جميع الدول الى حد كبير ، وذلك تحت تأثير المتطلبات العملية المستمرة اينما ظهرت .

ملحق . جدول بقيم الدالة Φ (a)

| Φ (a) | a | Φ (a) | a | Φ (a) | a | Φ (a) | a | Φ (a) | a |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠,٩٨٤ | ٢,٤٠ | ٠,٩٢٨ | ١,٨٠ | ٠,٧٧٠ | ١,٢٠ | ٠,٤٥١ | ٠,٦٠ | ٠,٠٠٠ | ٠,٠٠ |
| ٠,٩٨٤ | ٢,٤١ | ٠,٩٣٠ | ١,٨١ | ٠,٧٧٤ | ١,٢١ | ٠,٤٥٨ | ٠,٦١ | ٠,٠٠٨ | ٠,٠١ |
| ٠,٩٨٤ | ٢,٤٢ | ٠,٩٣١ | ١,٨٢ | ٠,٧٧٨ | ١,٢٢ | ٠,٤٦٥ | ٠,٦٢ | ٠,٠١٦ | ٠,٠٢ |
| ٠,٩٨٥ | ٢,٤٣ | ٠,٩٣٣ | ١,٨٣ | ٠,٧٨١ | ١,٢٣ | ٠,٤٧١ | ٠,٦٣ | ٠,٠٢٤ | ٠,٠٣ |
| ٠,٩٨٥ | ٢,٤٤ | ٠,٩٣٤ | ١,٨٤ | ٠,٧٨٥ | ١,٢٤ | ٠,٤٧٨ | ٠,٦٤ | ٠,٠٣٢ | ٠,٠٤ |
| ٠,٩٨٦ | ٢,٤٥ | ٠,٩٣٦ | ١,٨٥ | ٠,٧٨٩ | ١,٢٥ | ٠,٤٨٤ | ٠,٦٥ | ٠,٠٤٠ | ٠,٠٥ |
| ٠,٩٨٦ | ٢,٤٦ | ٠,٩٣٧ | ١,٨٦ | ٠,٧٩٢ | ١,٢٦ | ٠,٤٩١ | ٠,٦٦ | ٠,٠٤٨ | ٠,٠٦ |
| ٠,٩٨٦ | ٢,٤٧ | ٠,٩٣٩ | ١,٨٧ | ٠,٧٩٦ | ١,٢٧ | ٠,٤٩٧ | ٠,٦٧ | ٠,٠٥٦ | ٠,٠٧ |
| ٠,٩٨٧ | ٢,٤٨ | ٠,٩٤٠ | ١,٨٨ | ٠,٨٠٠ | ١,٢٨ | ٠,٥٠٤ | ٠,٦٨ | ٠,٠٦٤ | ٠,٠٨ |
| ٠,٩٨٧ | ٢,٤٩ | ٠,٩٤١ | ١,٨٩ | ٠,٨٠٣ | ١,٢٩ | ٠,٥١٠ | ٠,٦٩ | ٠,٠٧٢ | ٠,٠٩ |
| ٠,٩٨٨ | ٢,٥٠ | ٠,٩٤٣ | ١,٩٠ | ٠,٨٠٦ | ١,٣٠ | ٠,٥١٦ | ٠,٧٠ | ٠,٠٨٠ | ٠,١٠ |
| ٠,٩٨٨ | ٢,٥١ | ٠,٩٤٤ | ١,٩١ | ٠,٨١٠ | ١,٣١ | ٠,٥٢٢ | ٠,٧١ | ٠,٠٨٨ | ٠,١١ |
| ٠,٩٨٨ | ٢,٥٢ | ٠,٩٤٥ | ١,٩٢ | ٠,٨١٣ | ١,٣٢ | ٠,٥٢٨ | ٠,٧٢ | ٠,٠٩٦ | ٠,١٢ |
| ٠,٩٨٩ | ٢,٥٣ | ٠,٩٤٦ | ١,٩٣ | ٠,٨١٦ | ١,٣٣ | ٠,٥٣٥ | ٠,٧٣ | ٠,١٠٣ | ٠,١٣ |
| ٠,٩٨٩ | ٢,٥٤ | ٠,٩٤٨ | ١,٩٤ | ٠,٨٢٠ | ١,٣٤ | ٠,٥٤١ | ٠,٧٤ | ٠,١١١ | ٠,١٤ |
| ٠,٩٨٩ | ٢,٥٥ | ٠,٩٤٩ | ١,٩٥ | ٠,٨٢٣ | ١,٣٥ | ٠,٥٤٧ | ٠,٧٥ | ٠,١١٩ | ٠,١٥ |
| ٠,٩٩٠ | ٢,٥٦ | ٠,٩٥٠ | ١,٩٦ | ٠,٨٢٦ | ١,٣٦ | ٠,٥٥٣ | ٠,٧٦ | ٠,١٢٧ | ٠,١٦ |
| ٠,٩٩٠ | ٢,٥٧ | ٠,٩٥١ | ١,٩٧ | ٠,٨٢٩ | ١,٣٧ | ٠,٥٥٩ | ٠,٧٧ | ٠,١٣٥ | ٠,١٧ |
| ٠,٩٩٠ | ٢,٥٨ | ٠,٩٥٢ | ١,٩٨ | ٠,٨٣٢ | ١,٣٨ | ٠,٥٦٥ | ٠,٧٨ | ٠,١٤٣ | ٠,١٨ |
| ٠,٩٩٠ | ٢,٥٩ | ٠,٩٥٣ | ١,٩٩ | ٠,٨٣٥ | ١,٣٩ | ٠,٥٧٠ | ٠,٧٩ | ٠,١٥١ | ٠,١٩ |
| ٠,٩٩١ | ٢,٦٠ | ٠,٩٥٥ | ٢,٠٠ | ٠,٨٣٨ | ١,٤٠ | ٠,٥٧٦ | ٠,٨٠ | ٠,١٥٩ | ٠,٢٠ |
| ٠,٩٩١ | ٢,٦١ | ٠,٩٥٦ | ٢,٠١ | ٠,٨٤١ | ١,٤١ | ٠,٥٨٢ | ٠,٨١ | ٠,١٦٦ | ٠,٢١ |
| ٠,٩٩١ | ٢,٦٢ | ٠,٩٥٧ | ٢,٠٢ | ٠,٨٤٤ | ١,٤٢ | ٠,٥٨٨ | ٠,٨٢ | ٠,١٧٤ | ٠,٢٢ |
| ٠,٩٩١ | ٢,٦٣ | ٠,٩٥٨ | ٢,٠٣ | ٠,٨٤٧ | ١,٤٣ | ٠,٥٩٣ | ٠,٨٣ | ٠,١٨٢ | ٠,٢٣ |
| ٠,٩٩٢ | ٢,٦٤ | ٠,٩٥٩ | ٢,٠٤ | ٠,٨٥٠ | ١,٤٤ | ٠,٥٩٩ | ٠,٨٤ | ٠,١٩٠ | ٠,٢٤ |
| ٠,٩٩٢ | ٢,٦٥ | ٠,٩٦٠ | ٢,٠٥ | ٠,٨٥٣ | ١,٤٥ | ٠,٦٠٥ | ٠,٨٥ | ٠,١٩٧ | ٠,٢٥ |
| ٠,٩٩٢ | ٢,٦٦ | ٠,٩٦١ | ٢,٠٦ | ٠,٨٥٦ | ١,٤٦ | ٠,٦١٠ | ٠,٨٦ | ٠,٢٠٥ | ٠,٢٦ |
| ٠,٩٩٢ | ٢,٦٧ | ٠,٩٦٢ | ٢,٠٧ | ٠,٨٥٨ | ١,٤٧ | ٠,٦١٦ | ٠,٨٧ | ٠,٢١٣ | ٠,٢٧ |
| ٠,٩٩٣ | ٢,٦٨ | ٠,٩٦٢ | ٢,٠٨ | ٠,٨٦١ | ١,٤٨ | ٠,٦٢١ | ٠,٨٨ | ٠,٢٢١ | ٠,٢٨ |
| ٠,٩٩٣ | ٢,٦٩ | ٠,٩٦٣ | ٢,٠٩ | ٠,٨٦٤ | ١,٤٩ | ٠,٦٢٧ | ٠,٨٩ | ٠,٢٢٨ | ٠,٢٩ |
| ٠,٩٩٣ | ٢,٧٠ | ٠,٩٦٤ | ٢,١٠ | ٠,٨٦٦ | ١,٥٠ | ٠,٦٣٢ | ٠,٩٠ | ٠,٢٣٦ | ٠,٣٠ |
| ٠,٩٩٣ | ٢,٧٢ | ٠,٩٦٥ | ٢,١١ | ٠,٨٦٧ | ١,٥١ | ٠,٦٣٧ | ٠,٩١ | ٠,٢٤٣ | ٠,٣١ |
| ٠,٩٩٤ | ٢,٧٤ | ٠,٩٦٦ | ٢,١٢ | ٠,٨٧١ | ١,٥٢ | ٠,٦٤٢ | ٠,٩٢ | ٠,٢٥١ | ٠,٣٢ |
| ٠,٩٩٤ | ٢,٧٦ | ٠,٩٦٧ | ٢,١٣ | ٠,٨٧٤ | ١,٥٣ | ٠,٦٤٨ | ٠,٩٣ | ٠,٢٥٩ | ٠,٣٣ |
| ٠,٩٩٥ | ٢,٧٨ | ٠,٩٦٨ | ٢,١٤ | ٠,٨٧٦ | ١,٥٤ | ٠,٦٥٣ | ٠,٩٤ | ٠,٢٦٦ | ٠,٣٤ |
| ٠,٩٩٥ | ٢,٨٠ | ٠,٩٦٨ | ٢,١٥ | ٠,٨٧٩ | ١,٥٥ | ٠,٦٥٨ | ٠,٩٥ | ٠,٢٧٤ | ٠,٣٥ |
| ٠,٩٩٥ | ٢,٨٢ | ٠,٩٦٩ | ٢,١٦ | ٠,٨٨١ | ١,٥٦ | ٠,٦٦٣ | ٠,٩٦ | ٠,٢٨١ | ٠,٣٦ |
| ٠,٩٩٥ | ٢,٨٤ | ٠,٩٧٠ | ٢,١٧ | ٠,٨٨٤ | ١,٥٧ | ٠,٦٦٨ | ٠,٩٧ | ٠,٢٨٩ | ٠,٣٧ |
| ٠,٩٩٦ | ٢,٨٦ | ٠,٩٧١ | ٢,١٨ | ٠,٨٨٦ | ١,٥٨ | ٠,٦٧٣ | ٠,٩٨ | ٠,٢٩٦ | ٠,٣٨ |
| ٠,٩٩٦ | ٢,٨٨ | ٠,٩٧١ | ٢,١٩ | ٠,٨٨٨ | ١,٥٩ | ٠,٦٧٨ | ٠,٩٩ | ٠,٣٠٣ | ٠,٣٩ |
| ٠,٩٩٦ | ٢,٩٠ | ٠,٩٧٢ | ٢,٢٠ | ٠,٨٩٠ | ١,٦٠ | ٠,٦٨٣ | ١,٠٠ | ٠,٣١١ | ٠,٤٠ |

| a | Φ (a) | a | Φ (a) | a | Φ (a) | a | Φ (a) | a | Φ (a) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰,٤١ | ۰,٣١٨ | ١,۰١ | ۰,٦٨٨ | ١,٦١ | ۰,٨٩٣ | ٢,٢١ | ۰,٩٧٣ | ٢,٩٢ | ۰,٩٩٦ |
| ۰,٤٢ | ۰,٣٢٦ | ١,۰٢ | ۰,٦٩٢ | ١,٦٢ | ۰,٨٩٥ | ٢,٢٢ | ۰,٩٧٤ | ٢,٩٤ | ۰,٩٩٧ |
| ۰,٤٣ | ۰,٣٣٣ | ١,۰٣ | ۰,٦٩٧ | ١,٦٣ | ۰,٨٩٧ | ٢,٢٣ | ۰,٩٧٤ | ٢,٩٦ | ۰,٩٩٧ |
| ۰,٤٤ | ۰,٣٤۰ | ١,۰٤ | ۰,٧۰٢ | ١,٦٤ | ۰,٨٩٩ | ٢,٢٤ | ۰,٩٧٥ | ٢,٩٨ | ۰,٩٩٧ |
| ۰,٤٥ | ۰,٣٤٧ | ١,۰٥ | ۰,٧۰٦ | ١,٦٥ | ۰,٩۰١ | ٢,٢٥ | ۰,٩٧٦ | ٣,۰۰ | ۰,٩٩٧ |
| ۰,٤٦ | ۰,٣٥٤ | ١,۰٦ | ۰,٧١١ | ١,٦٦ | ۰,٩۰٣ | ٢,٢٦ | ۰,٩٧٦ | ٣,١۰ | ۰,٩٩٨ |
| ۰,٤٧ | ۰,٣٦٢ | ١,۰٧ | ۰,٧١٥ | ١,٦٧ | ۰,٩۰٥ | ٢,٢٧ | ۰,٩٧٧ | ٣,٢۰ | ۰,٩٩٩ |
| ۰,٤٨ | ۰,٣٦٩ | ١,۰٨ | ۰,٧٢۰ | ١,٦٨ | ۰,٩۰٧ | ٢,٢٨ | ۰,٩٧٧ | ٣,٣۰ | ۰,٩٩٩ |
| ۰,٤٩ | ۰,٣٧٦ | ١,۰٩ | ۰,٧٢٤ | ١,٦٩ | ۰,٩۰٩ | ٢,٢٩ | ۰,٩٧٨ | ٣,٤۰ | ۰,٩٩٩ |
| ۰,٥۰ | ۰,٣٨٣ | ١,١۰ | ۰,٧٢٩ | ١,٧۰ | ۰,٩١١ | ٢,٣۰ | ۰,٩٧٩ | ٣,٥۰ | ۰,٩٩٩٥ |
| ۰,٥١ | ۰,٣٩۰ | ١,١١ | ۰,٧٣٣ | ١,٧١ | ۰,٩١٣ | ٢,٣١ | ۰,٩٧٩ | ٣,٦۰ | ۰,٩٩٩٧ |
| ۰,٥٢ | ۰,٣٩٧ | ١,١٢ | ۰,٧٣٧ | ١,٧٢ | ۰,٩١٥ | ٢,٣٢ | ۰,٩٨۰ | ٣,٧۰ | ۰,٩٩٩٨ |
| ۰,٥٣ | ۰,٤۰٤ | ١,١٣ | ۰,٧٤٢ | ١,٧٣ | ۰,٩١٦ | ٢,٣٣ | ۰,٩٨۰ | ٣,٨۰ | ۰,٩٩٩٨٦ |
| ۰,٥٤ | ۰,٤١١ | ١,١٤ | ۰,٧٤٦ | ١,٧٤ | ۰,٩١٨ | ٢,٣٤ | ۰,٩٨١ | ٣,٩۰ | ۰,٩٩٩٩۰ |
| ۰,٥٥ | ۰,٤١٨ | ١,١٥ | ۰,٧٥۰ | ١,٧٥ | ۰,٩٢۰ | ٢,٣٥ | ۰,٩٨١ | | |
| ۰,٥٦ | ۰,٤٢٥ | ١,١٦ | ۰,٧٥٤ | ١,٧٦ | ۰,٩٢٢ | ٢,٣٦ | ۰,٩٨٢ | ٤,۰۰ | ۰,٩٩٩٩٤ |
| ۰,٥٧ | ۰,٤٣١ | ١,١٧ | ۰,٧٥٨ | ١,٧٧ | ۰,٩٢٣ | ٢,٣٧ | ۰,٩٨٢ | | |
| ۰,٥٨ | ۰,٤٣٨ | ١,١٨ | ۰,٧٦٢ | ١,٧٨ | ۰,٩٢٥ | ٢,٣٨ | ۰,٩٨٣ | ٥,۰۰ | ۰,٩٩٩٩٩٩٩٤ |
| ۰,٥٩ | ۰,٤٤٥ | ١,١٩ | ۰,٧٦٦ | ١,٧٩ | ۰,٩٢٧ | ٢,٣٩ | ۰,٩٨٣ | | |

المحتويات


صفحة

المقدمة . . . . . . . . . . . . . . . ٥
من المؤلف الى القارئ العربي . . . . . . . . . . . ٧

القسم الاول الاحتمالات

الباب الاول . احتمالات الحوادث . . . . . . . . . ٩
١ – مفهوم الاحتمال . . . . . . . . . . . ٩
٢ – الحوادث المستحيلة والحوادث المؤكدة . . . . . . . ١٧
٣ – مسألة . . . . . . . . . . . . . ١٩
الباب الثاني . قاعدة جمع الاحتمالات . . . . . . . . ٢١
٤ – استنتاج قاعدة جمع الاحتمالات . . . . . . . . ٢١
٥ – مجموعة الحوادث المتكاملة . . . . . . . . . ٢٥
٦ – امثلة . . . . . . . . . . . . . ٢٨
الباب الثالث . الاحتمالات المشروطة وقاعدة ضربها . . . . . ٣٢
٧ – مفهوم الاحتمال المشروط . . . . . . . . . ٣٢
٨ – استنتاج قاعدة ضرب الاحتمالات . . . . . . . . ٣٦
٩ – الحوادث المستقلة . . . . . . . . . . ٣٨
الباب الرابع . نتائج قواعد الجمع والضرب . . . . . . . ٤٦
١٠ – استنتاج بعض المتباينات . . . . . . . . . ٤٦
١١ – علاقة الاحتمالات المتكاملة . . . . . . . . ٤٩
١٢ – علاقة بييس . . . . . . . . . . . ٥٣
الباب الخامس . توزيع برنولي . . . . . . . . . ٦٢
١٣ – امثلة . . . . . . . . . . . . . ٦٢
١٤ – معادلات برنولي . . . . . . . . . . ٦٦
١٥ – اكبر عدد المرات احتمالا لوقوع الحادثة . . . . . . ٧۰
الباب السادس . نظرية برنولي . . . . . . . . . ٧٩
١٦ – محتوى نظرية برنولي . . . . . . . . . . ٧٩
١٧ – اثبات نظرية برنولي . . . . . . . . . . ٨١

## القسم الثانى الكميات العشوائية


الباب السابع . الكميات العشوائية وقانون التوزيع . . . . . . . . ٩٠
١٨ – مفهوم الكمية العشوائية . . . . . . . . . . ٩٠
١٩ – مفهوم قانون التوزيع . . . . . . . . . . ٩٣
الباب الثامن . القيمة المتوسطة . . . . . . . . . . ٩٩
٢٠ – تعريف القيمة المتوسطة للكمية العشوائية . . . . . . . ٩٩
الباب التاسع . القيمة المتوسطة للمجموع وحاصل الضرب . . . . . ١١٣
٢١ – نظرية حول القيمة المتوسطة للمجموع . . . . . . . ١١٣
٢٢ – نظرية القيمة المتوسطة لحاصل الضرب. . . . . . ١١٨
الباب العاشر . التشتت والانحراف المعيارى ( المتوسط ) . . . . ١٢١
٢٣ – قصور القيمة المتوسطة عن تحديد خواص الكمية العشوائية . . ١٢١
٢٤ – الطرق المختلفة لقياس تشتت الكمية العشوائية . . . ١٢٣
٢٥ – نظرية حول الانحراف التربيعى المعيارى . . . . . ١٣٢
الباب الحادى عشر . قانون الاعداد الكبيرة . . . . . . . ١٤٠
٢٦ – متباينة تشيبيشيف . . . . . . . . . . ١٤٠
٢٧ – قانون الاعداد الكبيرة. . . . . . . . . ١٤٢
٢٨ – اثبات قانون الاعداد الكبيرة . . . . . . . . ١٤٦
الباب الثانى عشر . قوانين التوزيع المعتدلة . . . . . . . ١٤٩
٢٩ – الصورة العامة للمسألة . . . . . . . . . ١٤٩
٣٠ – مفهوم منحنى التوزيع . . . . . . . . . ١٥٢
٣١ – خواص منحنيات التوزيع المعتدلة . . . . . . . ١٥٦
٣٢ – حل بعض المسائل . . . . . . . . . . ١٦٥
الباب الثالث عشر . مبادئ نظرية العمليات العشوائية . . . . . ١٧٥
٣٣ – فكرة عن العمليات العشوائية . . . . . . . . ١٧٥
٣٤ – مفهوم العمليات العشوائية . عمليات ماركوف العشوائية . . ١٧٩
٣٥ – ابسط سلسلة حوادث . . . . . . . . . ١٨٤
٣٦ – احدى مسائل نظرية الطوابير . . . . . . . ١٨٧
٣٧ – حول احدى مسائل نظرية الكفاءة . . . . . . . ١٩١
الخاتمة . . . . . . . . . . . . . ١٩٦
ملحق : جدول بقيم الكمية $\Phi(a)$ . . . . . . . . ٢٠٤


13 Зак. 1062

УДК 519.2(023)=927

Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор Хусам Шах
Художник А. Лерман
Художественный редактор П. Некундэ
Технический редактор Т. Максимова
Корректор Л. Карасева
Подписано к печати 8/IV 1974 г.
Бумага офсет. № 1 84×108 1/32=3,25 бум. л.
10,92 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 11,16. Изд. № 35/7493.
Цена 1 р. 47 к. Зак. 10122.
Тираж 8 000 экз.

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Типография издательства
«Калининградская правда», г. Калининград (обл.),
ул. Карла Маркса, 18.

Г $\frac{20203-371}{041(01)-74}$ доп. каталог